

Федеральное агентство по образованию  
Южно-Уральский государственный университет  
Кафедра «Приборостроение»

531.383 (07)  
Л887

Лысов А.Н., Виниченко Н.Т., Лысова А.А.

**ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГИРОСКОПОВ**  
**ЧАСТЬ 3**  
Учебное пособие

*Допущено Учебно-методическим объединением  
вузов по университетскому политехническому  
образованию в качестве учебного пособия для  
студентов высших учебных заведений, обучающихся  
по специальности 160402 «Приборы и системы  
ориентации, стабилизации и навигации»*

Челябинск  
Издательский центр ЮУрГУ  
2009

## 7. РОТОРНЫЕ ВИБРАЦИОННЫЕ ГИРОСКОПЫ

Вибрационные гироскопы объединяют устройства, различные по характеру собственного движения чувствительного элемента и принципу действия, в которых возникающий момент (сила) вызывает отклонения чувствительного элемента относительно основания, совершающего переносное движение.

Отличительным признаком вибрационных гироскопов является связь чувствительного элемента с основанием, на котором он установлен.

Существующие ВГ подразделяют на роторные вибрационные гироскопы (РВГ) и осцилляторные вибрационные гироскопы (ОВГ) [2] (рис. 7.1). В основу такой классификации положен признак, определяемый характером основного движения носителя кинетического момента (чувствительного элемента). В РВГ таким основным движением является собственное вращение ротора (чувствительного элемента), в ОВГ – колебательное движение чувствительного элемента (массы).

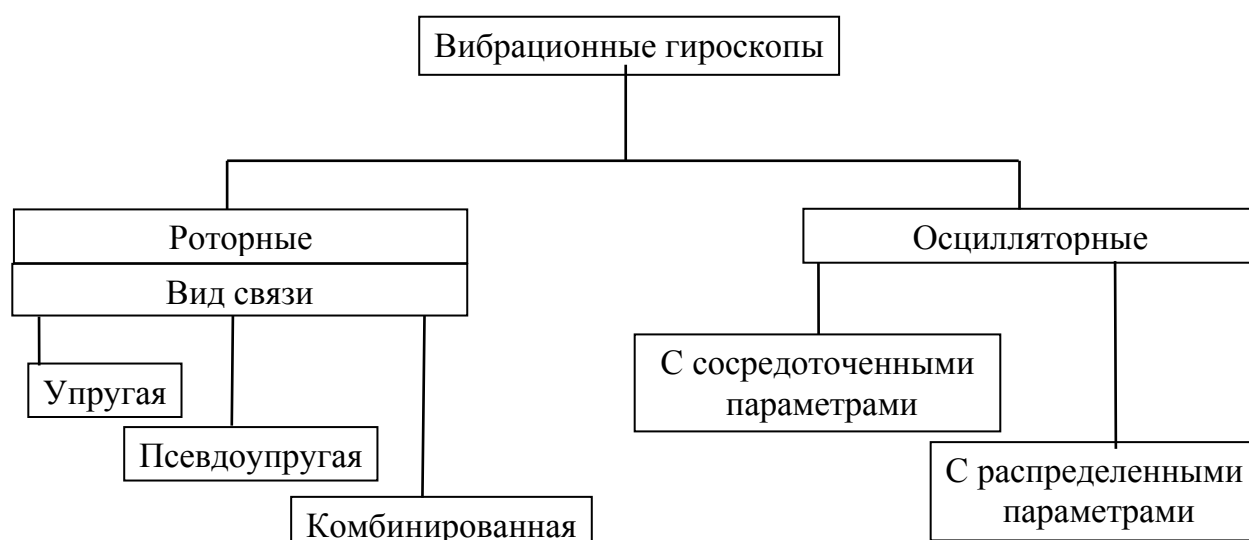


Рис. 7.1. Классификация вибрационных гироскопов

Как показано на рисунке 7.1, у роторных вибрационных гироскопов различают следующие виды связи: упругую, псевдоупругую и комбинированную. Принадлежность связи к одному из этих видов определяется следующим математическим признаком: если в уравнениях движения чувствительного элемента РВГ, записанных по отношению к осям Резаля, позиционный член не является функцией угловой скорости собственного вращения гироскопа, то связь является упругой; в том случае, когда указанная функциональная зависимость существует связь считается псевдоупругой; при сочетании обоих видов имеет место комбинированная связь.

Осцилляторные вибрационные гироскопы можно подразделить на два вида: **ОВГ с сосредоточенными параметрами**, **ОВГ с распределенными параметрами**. К первому виду относятся такие ВГ, конструкция которых допускает выделение сосредоточенной массы и сосредоточенного упругого

элемента, что в итоге позволяет характеризовать движение чувствительного элемента гироскопа обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Второй вид ОВГ включает в себя такие гироскопы, для которых указанное допущение невозможно, в силу чего движение гироскопа должно отображаться дифференциальными уравнениями в частных производных.

Роторные вибрационные гироскопы в настоящее время получили достаточно широкое применение. Они могут отличаться приводом, способами реализации и конструкцией подвеса ротора, его формой, съемом полезного сигнала и т.д. Наиболее широко распространены два типа роторных вибрационных гироскопов – с двумя и тремя степенями свободы.

Бурное развитие транспорта в середине XX века привело к существенному повышению точностных требований, предъявляемых к навигационным приборам. Это послужило причиной широких исследований и разработок по совершенствованию гироскопических приборов, являющихся, как правило, датчиками угловых движений транспортных средств. К настоящему времени совершенствование гироскопов с шарикоподшипниковыми опорами, по-видимому, достигло своего предела. Для решения задачи повышения точности инерциальной навигации, стабилизации, управления и наведения в 50-х годах начались работы по созданию нового поколения инерциальных чувствительных элементов – поплавковых гироскопов.

Дальнейшее развитие авиации, ракетной и космической техники поставило на повестку дня задачу снижения габаритов, массы, потребляемой мощности, повышения точности и снижения времени готовности. Несмотря на хорошие точностные характеристики, поплавковые гироскопы были сложны в изготовлении и в силу особенностей своей конструкции перестали удовлетворять поставленным требованиям. Попытки решить эту задачу заканчивались, как правило, разработкой чрезвычайно дорогих приборов.

В начале 60-х годов была предложена принципиально новая конструкция гироскопа. От поплавкового подвеса здесь мы вновь приходим к "сухому", но уже на новом качественном уровне. Основная идея этой конструкции заключается в том, что ротор гироскопа связан с помощью внутреннего карданного подвеса, образованного упругими элементами. Это избавляет его от существенного источника погрешностей – сухого трения, имеющего место в традиционном "сухом" гироскопе. С другой стороны, в такой конструкции нет поддерживающей жидкости, благодаря чему она существенно упрощается. Чтобы гироскоп функционировал как астатический, в нем необходимо скомпенсировать упругие моменты, возникающие в подвесе вследствие отклонения носителей кинетического момента. Как оказалось, такая компенсация возможна за счет соответствующего подбора основных параметров гироскопа. Условия, которому должны подчиняться эти параметры, стали называться условиями динамической настройки, а класс таких приборов – **динамически настраиваемыми гироскопами** (ДНГ). В литературе часто употребляется термин "*роторный вибрационный гироскоп*" (РВГ), который относится к такому типу приборов, реакция носителей кинетического момента которых на переносное угловое

движение основания имеет колебательный характер. Так как для обеспечения условия динамической настройки в ДНГ необходимо создание кинетического момента, компенсирующего упругий момент, в таком гироскопе обязательно должен присутствовать, по крайней мере, один элемент подвеса, имеющий кинетический момент и колеблющийся в соответствии с переносным движением основания. Таким образом, любой динамически настраиваемый гироскоп имеет свойства, присущие РВГ, и является его разновидностью. Фундаментальные работы, посвященные теоретическим основам работы ДНГ, были опубликованы преимущественно советскими и американскими учеными. Среди них необходимо отметить труды Л.И. Брозгуля, Е.Л. Смирнова [2, 3, 4], Ю.Б. Власова, О.М. Филонова [7], П. Сейвета [28].

Практические результаты исследований, разработок и эксплуатации ДНГ показали, что его точностные параметры соизмеримы с характеристиками поплавкового гироскопа, однако кроме этого существует целый ряд преимуществ:

- благодаря меньшему количеству функциональных частей (отсутствие поддерживающей жидкости, гибких токоподводов, устройств компенсации температурного расширения жидкости, например, сильфонов), более широким допускам на некоторые элементы, ДНГ более надежен, чем поплавковый гироскоп;

- в отличие от поплавкового гироскопа, которому требуется точная температурная стабилизация и длительный период готовности, ДНГ той же точности может функционировать в более широком диапазоне температур сразу же после того, как будет достигнута необходимая рабочая скорость. Это происходит обычно не более чем через 30 секунд после включения;

- потребляемая динамически настраиваемым гироскопом мощность определяется величиной, необходимой для приводного двигателя, датчиков момента и датчиков угла, и при нормальных условиях составляет несколько ватт;

- внутренний карданный подвес ротора и принципиальная конструктивная простота ДНГ обеспечивает ему значительно меньшие габариты и массу, чем у поплавкового гироскопа.

Указанные особенности этого класса приборов определили начало их успешного использования в качестве чувствительных элементов гироскопических стабилизаторов и бесплатформенных инерционных навигационных систем.

Рассмотрим основные схемы роторных вибрационных гироскопов. В любом известном роторном вибрационном гироскопе (динамически настраиваемом гироскопе) можно выделить два существенных признака, необходимых для его нормального функционирования: во-первых, наличие, по крайней мере, **одного носителя кинетического момента**, во-вторых, **присутствие упругой связи между этим носителем (носителями) и основанием прибора**.

Самые известные конструктивные схемы роторных вибрационных гироскопов (динамически настраиваемых гироскопов) приведены на рисунке 7.2. Многие конструкции можно получить комбинацией элементов, характерных для каждой схемы в отдельности. Одним из первых был предложен гироскоп, изображенный

на рисунке 7.2, а). Ротор этого гироскопа связан с валом, приводящимся во вращение с постоянной угловой скоростью с помощью двигателя (на рисунке не показан), упругими элементами (выполненными, например, в форме торсионов). Последние имеют вполне определенную качественную жесткость на кручение и достаточную большую на изгиб. Поэтому ротор имеет возможность малых угловых поворотов относительно вала по продольной оси упругих элементов. При этом возникает упругий момент, пропорциональный угловому отклонению ротора относительно вала. Конструкция гироскопа на рисунке 7.2, д) похожа на рассмотренную. Отличие заключается, во-первых, в том, что ротор имеет две степени свободы относительно вала благодаря двум парам упругих элементов со взаимно перпендикулярными продольными осями. С этой целью вал в средней части выполнен в форме рамки. Во-вторых, ротор у этого гироскопа должен быть несимметричным. Это необходимо для того, чтобы появлялся динамический момент, компенсирующий упругий, т.е. для создания возможности динамической настройки. В установившемся режиме реакция этих гироскопов на входное угловое движение основания в системе координат, связанной с корпусом прибора, представляет собой постоянное отклонение ротора с наложенными на него колебаниями с частотой, равной удвоенной угловой скорости вращения вала. Такие гироскопы по предложенной Е.Л. Смирновым классификации [2] являются вибрационно-прецессионными ДНГ. В рассмотренных конструкциях угловая вибрация основания с частотой, равной удвоенной частоте вращения вала, вызывает достаточно существенный дрейф. Подробнее ознакомиться с этими гироскопами можно в работе [7].

Для уменьшения влияния этой погрешности была предложена схема (см. рис. 7.2, б)), названная **гироскопом Хоува**. Ротор этого ДНГ одной парой упругих элементов соединен с кольцом подвеса, который другой парой упругих элементов, перпендикулярных первой, соединен с валом. Моменты инерции ротора такого гироскопа обычно выбираются намного больше моментов инерции кольца. По указанной классификации такой гироскоп относится к прецессионно-вибрационным ДНГ. Рассмотренная конструкция имеет гораздо меньший дрейф от угловой вибрации основания на удвоенной частоте вращения вала, однако полностью от такой погрешности она не избавлена. Для более глубокого ознакомления с таким гироскопом можно обратиться к работам [1, 3, 4, 10, 18, 21, 22].

Схема на рисунке 7.2, в) лишена указанного недостатка. Вообще говоря, этот ДНГ является развитием схемы гироскопа Хоува. Если в последнем вместо кольца использовать рамку, и, кроме этого, установить еще одну, но развернутую в экваториальной плоскости на  $90^\circ$ , получится так называемый ДНГ с двухрамочным (двухколечным) подвесом. Реакцией такого гироскопа на угловое перемещение основания будет постоянный угол отклонения ротора в системе координат, связанной с корпусом прибора. Согласно существующей классификации такой гироскоп называется прецессионным ДНГ. По сравнению со всеми рассмотренными ранее схемами гироскоп с двухколечным подвесом имеет существенно лучшую динамику.

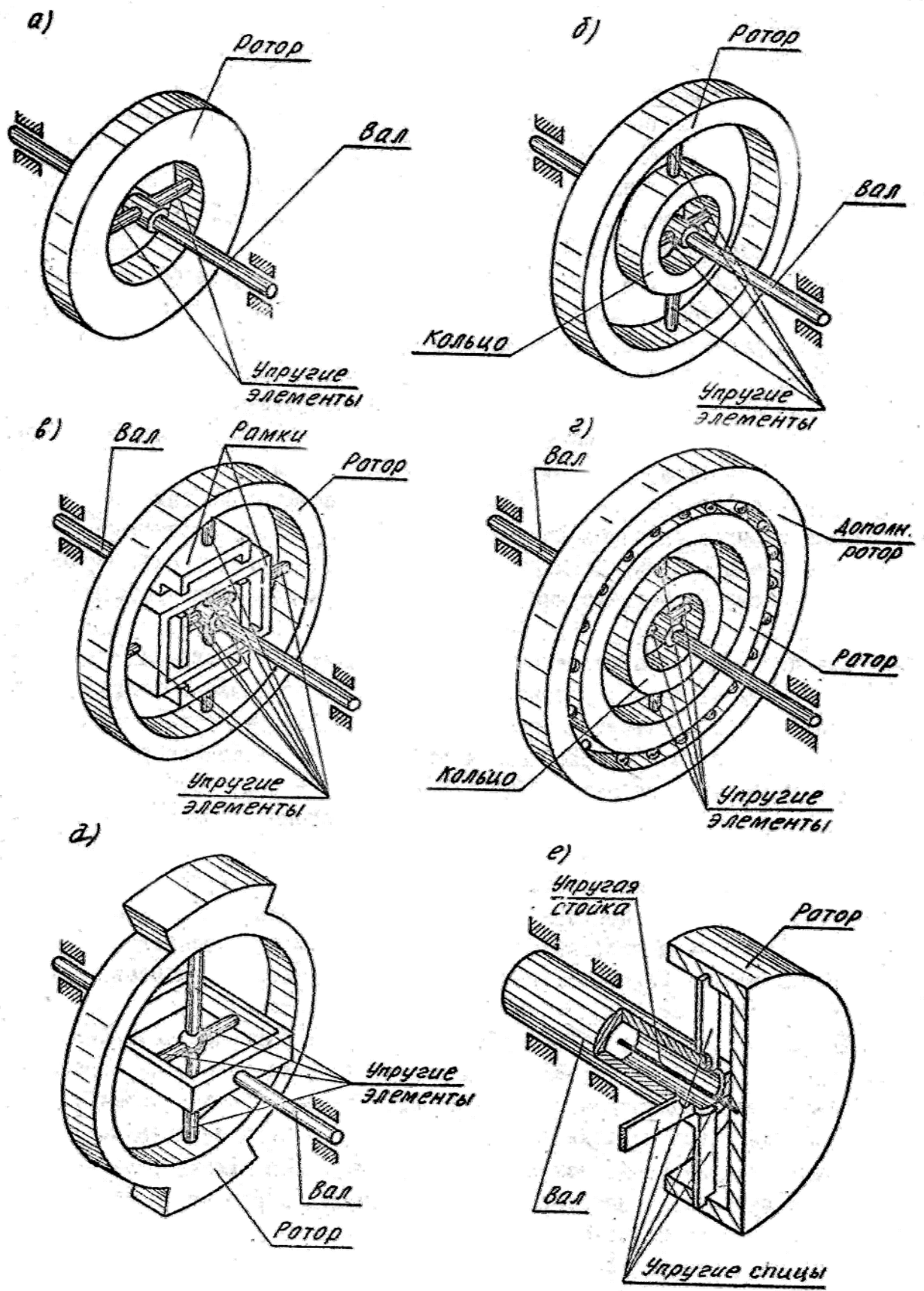


Рис. 7.2. Основные схемы ДНГ

Для повышения чувствительности динамически настраиваемых гироскопов в режиме измерения угловой скорости было предложено использовать дополнительный носитель кинетического момента, представляющий собой дополнительный ротор, вращающийся относительно основного ротора с определенной угловой скоростью. Такой носитель может быть использован на любом из приведенных на рисунке 7.2 гироскопов. При этом гироскоп работает в режиме астатического, такой дополнительный элемент позволяет снизить требования к стабильности скорости вращения привода. В качестве примера на рисунке 7.2, г) изображен ДНГ с одноколечным подвесом (типа гироскопа Хоува) с дополнительным носителем кинетического момента.

Схема на рисунке 7.2, е) характерна тем, что ротор гироскопа, выполненный в форме колокола, крепится на валу с помощью симметрично расположенных радиальных спиц, ширина которых намного больше толщины. Это позволяет ротору отклоняться относительно вала по двум взаимно перпендикулярным осям, лежащим в плоскости, перпендикулярной оси вращения вала, и препятствует угловому смещению ротора по этой оси. Для предотвращения осевого смещения ротора в конструкции предусмотрена упругая стойка. Динамический момент, компенсирующий упругий, возникает за счет колебаний распределенных в спицах масс. По динамическим характеристикам этот ДНГ подобен гироскопу с двухколечным подвесом и, таким образом, относится к прецессионным ДНГ.

Итак, по реакции на входную угловую скорость или угол отклонения основания в системе координат, связанной с корпусом прибора, все рассматриваемые гироскопы можно разделить на три группы. Если в установившемся режиме ДНГ имеет постоянное отклонение, то он называется прецессионным динамически настраиваемым гироскопом (см. рис. 7.2, в), е)). Если в установившемся режиме ДНГ совершает колебания с частотой, равной удвоенной частоте собственного вращения чувствительного элемента, то он называется вибрационным динамически настраиваемым гироскопом. Если движение ДНГ получается наложением двух указанных выше движений, то он называется вибрационно-прецессионным динамически настраиваемым (см. рис. 7.2, а), б), г), д)). На приведенных схемах нет вибрационного ДНГ, однако из-за того, что амплитуда колебания ротора гироскопа, изображенного на рисунке 7.2, д), на удвоенной частоте вращения вала при соответствующем подборе конструктивных параметров, может существенно превышать постоянное угловое отклонение, то такой ДНГ иногда называют **вибрационным**.

Рассмотрим принцип работы и устройство РВГ с двумя степенями свободы на примере простейшей кинематической схемы (рис. 7.3). Ротор гироскопа 1 представляет собой симметричное кольцо, которое при помощи упругих торсионов 2 соединено с валом 3. Привод ротора осуществляется двигателем 4 через вал, с которым кинематически связан генератор опорного напряжения (на рисунке не показан). Двигатель жестко скреплен с основанием 5. Степень свободы ротора вокруг оси  $x$  (совпадающей с осью торсионов) ограничена упругостью торсионов.

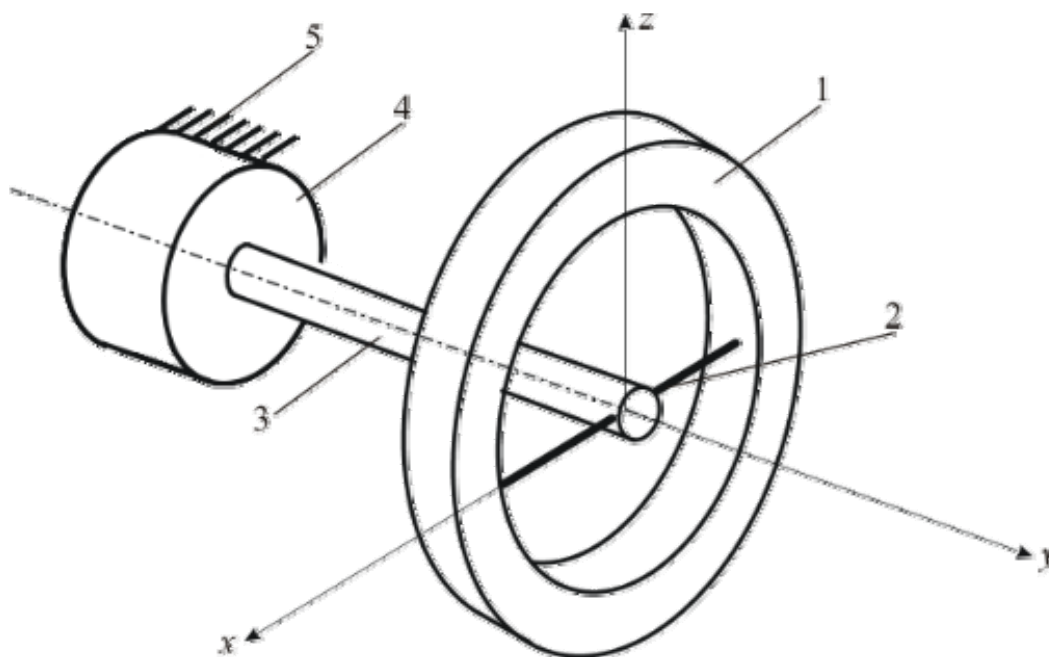


Рис. 7.3. Кинематическая схема РВГ с двумя степенями свободы:  
 1 – ротор; 2 – торсионы; 3 – вал; 4 – двигатель; 5 – основание

Для описания положения вала и ротора относительно основания гироскопа, а также их взаимного расположения введем системы координат (рис. 7.4):  $\xi\eta\zeta$  – система координат, связанная с основанием;  $x_\sigma y_\sigma z_\sigma$  – система координат, связанная с валом;  $x_p y_p z_p$  – система координат, связанная с ротором.

Введем следующие обозначения:  $\varphi$  – угол поворота вала относительно основания;  $\dot{\varphi} = \Omega$  – угловая скорость вала относительно основания;  $\chi$  – угол поворота ротора относительно вала;  $Jx_p, Jy_p, Jz_p$  – моменты инерции ротора относительно соответствующих осей;  $c_T$  – жесткость торсионов на кручение;  $\kappa_d$  – коэффициент демпфирования.

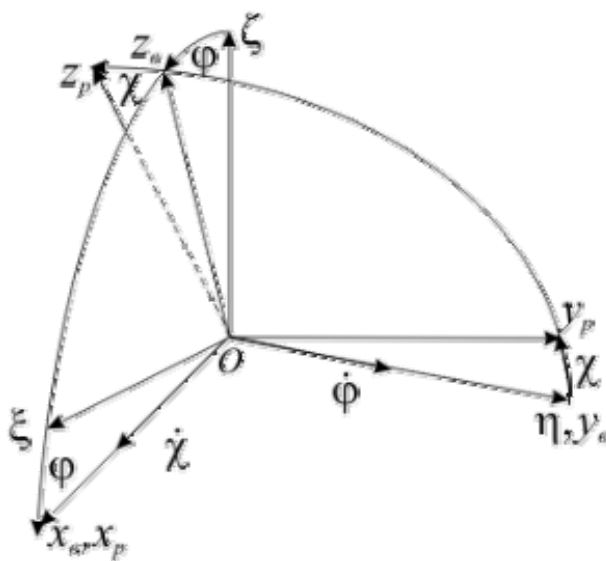


Рис. 7.4. Система координат РВГ



## 7.1. Уравнения движения роторного вибрационного гироскопа

Для получения дифференциальных уравнений движения найдем проекции абсолютных угловых скоростей вала и ротора на связанные с ними оси.

$$\left. \begin{aligned} \omega_{xB} &= \omega_{\xi} \cos \varphi - \omega_{\zeta} \sin \varphi, \\ \omega_{yB} &= \Omega + \omega_{\eta}, \\ \omega_{zB} &= \omega_{\xi} \cos \varphi + \omega_{\zeta} \sin \varphi, \\ \omega_{xp} &= \dot{\chi} + \omega_{xB} = \dot{\chi} + \omega_{\xi} \cos \varphi - \omega_{\zeta} \sin \varphi, \\ \omega_{yp} &= \omega_{yB} \cos \chi + \omega_{zB} \sin \chi \approx \omega_{yB} + \chi \omega_{zB}, \\ \omega_{zp} &= \omega_{zB} \cos \chi - \omega_{yB} \sin \chi \approx \omega_{zB} - \chi \omega_{yB}. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Для вывода уравнения движения гироскопа воспользуемся уравнением кинетостатики:

$$\Sigma m \omega x_p = 0.$$

Откуда имеем

$$-J_{xp} \dot{\omega}_{xp} + J_{yp} \omega_{yp} \omega_{zp} - J_{zp} \omega_{zp} \omega_{yp} - c_T \chi - k_o \dot{\chi} + M_{xp \text{возм}} = 0.$$

Перепишем полученное уравнение в виде:

$$J_{xp} \dot{\omega}_{xp} - (J_{yp} - J_{zp}) \omega_{yp} \omega_{zp} + c_T \chi + k_o \dot{\chi} = M_{xp \text{возм}}. \quad (7.2)$$

Из выражений (7.1) получим

$$\dot{\omega}_{xp} = \ddot{\chi} + \dot{\omega}_{\xi} \cos \Omega t - \omega_{\xi} \Omega \sin \Omega t - \dot{\omega}_{\zeta} \sin \Omega t - \omega_{\zeta} \Omega \cos \Omega t;$$

$$\begin{aligned} \omega_{yp} \omega_{zp} &= (\omega_{yB} + \chi \omega_{zB})(\omega_{zB} - \chi \omega_{yB}) = \omega_{yB} \omega_{zB} + \chi(\omega_{zB}^2 - \omega_{yB}^2) - \chi^2 \omega_{yB} \omega_{zB} \approx \\ &\approx (\Omega + \omega_{\eta})(\omega_{\xi} \cos \Omega t + \omega_{\zeta} \sin \Omega t) + \chi[(\omega_{\xi} \cos \Omega t + \omega_{\zeta} \sin \Omega t)^2 - (\Omega + \omega_{\eta})^2] \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\Omega \gg \omega_{\xi}, \omega_{\zeta}, \omega_{\eta}$  получим

$$\omega_{yp} \omega_{zp} \approx \Omega(\omega_{\xi} \cos \Omega t + \omega_{\zeta} \sin \Omega t) - \chi \Omega^2.$$

Подставив выражения для  $\dot{\omega}_{xp}$  и  $\omega_{yp} \omega_{zp}$  в уравнение (7.1), получим

$$\begin{aligned} J_{xp} \ddot{\chi} + [(J_{yp} - J_{zp}) \Omega^2 + c_T] \chi + k_o \dot{\chi} &= (J_{yp} + J_{xp} - J_{zp}) \Omega(\omega_{\xi} \sin \Omega t + \omega_{\zeta} \cos \Omega t) - \\ &- J_{xp} (\dot{\omega}_{\xi} \cos \Omega t + \dot{\omega}_{\zeta} \sin \Omega t). \end{aligned}$$

После преобразований, полагая  $M_{xp \text{возм}} = 0$ , получим

$$\begin{aligned} J_{xp} \ddot{\chi} + J_{xp} \dot{\omega}_{\xi} \cos \Omega t - J_{xp} \omega_{\xi} \Omega \sin \Omega t - J_{xp} \dot{\omega}_{\zeta} \sin \Omega t - J_{xp} \omega_{\zeta} \Omega \cos \Omega t - \\ - (J_{yp} - J_{zp}) \Omega(\omega_{\xi} \sin \Omega t + \omega_{\zeta} \cos \Omega t) + (J_{yp} - J_{zp}) \chi \Omega^2 + k_o \dot{\chi} + c_T \chi = M_{xp \text{возм}}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Разделив все члены уравнения (7.3) на  $J_{xp}$ , получим

$$\ddot{\chi} + 2d\omega_0 \dot{\chi} + \omega_0^2 \chi = \lambda \Omega(\omega_{\xi} \sin \Omega t + \omega_{\zeta} \cos \Omega t) - (\dot{\omega}_{\xi} \cos \Omega t - \dot{\omega}_{\zeta} \sin \Omega t), \quad (7.4)$$

где

$$2d\omega_0 = \frac{k_o}{J_{xp}}; \omega_0^2 = \frac{(J_{yp} - J_{zp}) \Omega^2 + c_T}{J_{xp}}; \lambda = \frac{J_{yp} + J_{xp} - J_{zp}}{J_{xp}}.$$

Рассмотрим частный случай  $\omega_\xi = const, \omega_\zeta = const$ . Уравнение движения гироскопа (7.4) в этом случае примет вид:

$$\ddot{\chi} + 2d\omega_0\dot{\chi} + \omega_0^2\chi = \lambda\Omega(\omega_\xi \sin\Omega t + \omega_\zeta \cos\Omega t), \quad (7.5)$$

Частное решение уравнения (7.5) запишем в виде

$$\chi = D_1 \sin\Omega t + D_2 \cos\Omega t. \quad (7.6)$$

Для определения  $D_1$  и  $D_2$  найдем  $\dot{\chi}$  и  $\ddot{\chi}$

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= D_1\Omega \cos\Omega t - D_2\Omega \sin\Omega t, \\ \ddot{\chi} &= -D_1\Omega^2 \sin\Omega t - D_2\Omega^2 \cos\Omega t. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Подставив производные в уравнение движения (7.5), получим

$$\begin{aligned} -D_1\Omega^2 \sin\Omega t - D_2\Omega^2 \cos\Omega t + 2d\omega_0 D_1\Omega \cos\Omega t - 2d\omega_0 D_2\Omega \sin\Omega t + \\ + \omega_0^2 D_1 \sin\Omega t + \omega_0^2 D_2 \cos\Omega t = \lambda\Omega\omega_\xi \sin\Omega t + \lambda\Omega\omega_\zeta \cos\Omega t. \end{aligned}$$

Перепишем полученное выражение в виде:

$$\begin{aligned} [(\omega_0^2 - \Omega^2)D_1 - 2d\omega_0\Omega D_2] \sin\Omega t + [2d\omega_0\Omega D_1 + (\omega_0^2 - \Omega^2)D_2] \cos\Omega t = \\ = \lambda\Omega\omega_\xi \sin\Omega t + \lambda\Omega\omega_\zeta \cos\Omega t. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Из выражения (7.8) запишем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \Omega^2)D_1 - 2d\omega_0\Omega D_2 &= \lambda\Omega\omega_\xi; \\ 2d\omega_0\Omega D_1 + (\omega_0^2 - \Omega^2)D_2 &= \lambda\Omega\omega_\zeta. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Главный определитель и определители замещения системы (7.9) имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \omega_0^2 - \Omega^2 & -2d\omega_0\Omega \\ 2d\omega_0\Omega & \omega_0^2 - \Omega^2 \end{vmatrix} = [(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4d^2\omega_0^2\Omega^2]; \\ \Delta_{D_1} &= \lambda\Omega \begin{vmatrix} \omega_\xi & -2d\omega_0\Omega \\ \omega_\zeta & \omega_0^2 - \Omega^2 \end{vmatrix} = \lambda\Omega[(\omega_0^2 - \Omega^2)\omega_\xi + 2d\omega_0\Omega\omega_\zeta]; \\ \Delta_{D_2} &= \lambda\Omega \begin{vmatrix} \omega_0^2 - \Omega^2 & \omega_\xi \\ 2d\omega_0\Omega & \omega_\zeta \end{vmatrix} = \lambda\Omega[-2d\omega_0\Omega\omega_\xi + (\omega_0^2 - \Omega^2)\omega_\zeta]. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\lambda\Omega}{\Delta} [(\omega_0^2 - \Omega^2)\omega_\xi + 2d\omega_0\Omega\omega_\zeta]; \\ D_2 &= \frac{\lambda\Omega}{\Delta} [-2d\omega_0\Omega\omega_\xi + (\omega_0^2 - \Omega^2)\omega_\zeta]. \end{aligned}$$

Подставив выражения для  $D_1$  и  $D_2$  в частное решение, получим

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{\lambda\Omega}{\Delta} [(\omega_0^2 - \Omega^2)\omega_\xi \sin\Omega t + 2d\omega_0\Omega\omega_\zeta \sin\Omega t] + \\ &+ \frac{\lambda\Omega}{\Delta} [-2d\omega_0\Omega\omega_\xi \cos\Omega t + (\omega_0^2 - \Omega^2)\omega_\zeta \cos\Omega t] \end{aligned}$$

или  $\chi = \frac{\lambda\Omega}{\Delta} \omega_\xi [(\omega_0^2 - \Omega^2) \sin\Omega t - 2d\omega_0\Omega \cos\Omega t] + \frac{\lambda\Omega}{\Delta} \omega_\zeta [(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos\Omega t + 2d\omega_0\Omega \sin\Omega t]$ .

Обозначим  $\omega_0^2 - \Omega^2 = A \cos \varepsilon$ ;  $2d\omega_0\Omega = A \sin \varepsilon$ ,

тогда

$$\chi = \frac{\lambda\Omega}{\Delta} \omega_\xi A [\cos \varepsilon \sin \Omega t - \sin \varepsilon \cos \Omega t] + \frac{\lambda\Omega}{\Delta} \omega_\zeta A [\cos \varepsilon \cos \Omega t + \sin \varepsilon \sin \Omega t]$$

или

$$\chi = \frac{\lambda\Omega}{\Delta} A [\omega_\xi \sin(\Omega t - \varepsilon) + \omega_\zeta \cos(\Omega t - \varepsilon)],$$

где

$$A = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4d^2\omega_0^2\Omega^2};$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2d\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

С учетом выражений для  $\Delta$  и  $A$  получим

$$\chi = \frac{\lambda\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4d^2\omega_0^2\Omega^2}} [\omega_\xi \sin(\Omega t - \varepsilon) + \omega_\zeta \cos(\Omega t - \varepsilon)].$$

При выполнении условия  $\omega_0 = \Omega$   $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ .

В этом случае

$$\chi = \frac{\lambda}{2d\omega_0} (\omega_\zeta \sin \Omega t - \omega_\xi \cos \Omega t).$$

Из условия  $\omega_0^2 = \Omega^2$  имеем  $\frac{(J_{yp} - J_{zp})\Omega^2 + c_T}{J_{xp}} = \Omega^2$ , откуда

$c_T = \Omega^2 (J_{xp} + J_{zp} - J_{yp})$  или для симметричного ротора  $c_T = \Omega^2 (2J_\vartheta - J_0)$ , где  $J_\vartheta, J_0$  – экваториальный и осевой моменты инерции ротора. Условие  $c_T = \Omega^2 (2J_\vartheta - J_0)$  называется **условием резонансной настройки**.

## 7.2. Съём сигнала и обработка информации [7]

Одной из важнейших компонент РВГ, во многом определяющей его точность и чувствительность, является система съема угла поворота роторов РВГ относительно основания или друг относительно друга и последующей обработки полученной информации. В зависимости от выбора способа съема полезной информации об угловых скоростях вращения основания относительно осей чувствительности прибора заключается либо в постоянных угловых отклонениях роторов в системе координат, связанной с основанием, либо в амплитудно-модулированных колебаниях роторов с частотами, равными или кратными частотам вращения приводного двигателя или комбинационным частотам. Однако для любого способа съема сигнала диапазон рабочих углов измерителя угла поворота ротора должен лежать в пределах примерно от 0,01 до десятков угловых секунд. Измерения таких малых угловых перемещений представляет собой достаточно сложную техническую задачу. Принципиально она может решаться с

помощью измерителей угла различного типа. При этом общими требованиями к ним являются:

1) высокая статическая точность, т.е. отсутствие на выходе измерителя угла нулевого сигнала, синхронного с полезным сигналом и превышающего заданный уровень;

2) высокая динамическая точность, которая заключается в том, что формирование сигнала должно производиться с минимальными искажениями в пределах рабочей полосы частот прибора;

3) высокая чувствительность и низкий порог чувствительности;

4) минимальное реактивное воздействие на роторы РВГ;

5) достаточно высокая мощность выходного сигнала;

6) высокая надежность и помехозащищенность при работе в условиях, определяемых тактико-техническими требованиями.

По принципу действия измерители углов можно разделить на:

1) пассивные, требующие постороннего источника питания;

2) активные, генерирующие сигнал, пропорциональный измеряемой величине.

К пассивным относятся измерители емкостного и индуктивного типов, к активным – индукционного и пьезоэлектрического типов. С целью исключения влияния на работу прибора линейных колебаний роторов и обеспечения максимально возможной чувствительности все измерители строятся по дифференциальной схеме.

Схема емкостного измерителя изображена на рисунке 7.5, а). Ротор помещен между четырьмя обкладками  $O$ , которые в зависимости от выбора измерительной системы координат либо закреплены на основании, либо вращаются вместе с валом, либо установлены на другом роторе РВГ. Ротор совместно с обкладками образует четыре емкости  $C_1, C_2, C_3$  и  $C_4$ . При повороте ротора на угол  $\gamma$  емкости  $C_1$  и  $C_3$  будут уменьшаться, а  $C_2, C_4$  – увеличиваться, и наоборот. Емкости  $C_1, C_3$  и  $C_2, C_4$  соединены попарно и могут быть включены в плечи моста (см. рис. 7.5, б)). Если обкладки  $C_1 - C_4$  установлены на вращающейся части прибора, то для передачи сигнала на основание используется емкостный коллектор. Емкостный коллектор состоит из двух пар концентрических колец, одно из которых в каждой паре установлено на вращающейся части, а другое на корпусе. Эти кольца образуют емкости  $C_5$  и  $C_6$  (см. рис. 7.5, б)). Так как емкости коллектора соединены последовательно с изменяющимися в зависимости от угла  $\gamma$  емкостями, то для получения высокой чувствительности системы съема необходимо, чтобы  $C_5 \gg C_6 + C_3$  и  $C_6 \gg C_2 + C_4$ . К одной из диагоналей моста подводится переменное напряжение питания  $U_{num}$ . В соответствии с рекомендациями для такого типа измерителей частота питания выбирается в диапазоне  $(0,1 - 1)$  МГц. Напряжение сигнала  $U_{сиг}$  снимается с другой диагонали моста.

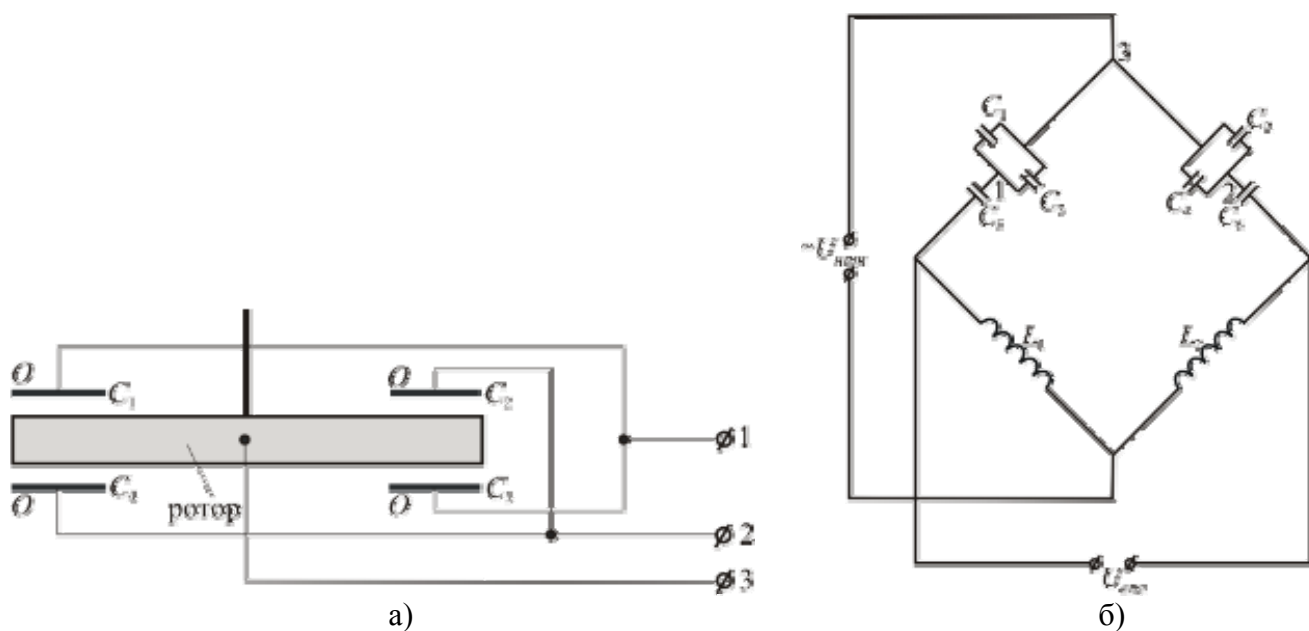


Рис. 7.5. Схема съема сигнала РВГ

Система обработки при съеме полезного сигнала в виде амплитудно-модулированных колебаний решает задачу получения двух сигналов по постоянному току, пропорциональных угловым скоростям движения основания относительно осей чувствительности прибора. Функциональная схема такой системы изображена на рисунке 7.6. Сигнал, поступающий с моста измерителя угловых перемещений ротора (ИУ), представляет собой колебания с частотой изменения питающего напряжения, балансно-модулированные колебаниями с частотой полезного сигнала. Амплитуда и фаза последних заключает в себе информацию об угловых скоростях основания.

Первым этапом обработки сигнала является его демодуляция на частоте  $f_{пит}$ . Для этого сигнал с моста  $U_{сиг}$  поступает на демодулятор  $D$ , на который в качестве опорного подается сигнал с генератора  $G$ , вырабатывающего напряжение питания моста. На выходе демодулятора получают колебания с амплитудой, пропорциональной углу поворота ротора.

С выхода демодулятора после предварительного усиления с помощью усилителя  $U$  сигнал  $U_0$  поступает на фазочувствительный демодулятор  $ФД$ . Опорный сигнал для фазочувствительного демодулятора вырабатывается с помощью генераторов опорных импульсов  $ГОИ$ . Генератор опорных импульсов представляет собой магнит, запрессованный во вращающуюся часть прибора, и катушку, установленную на корпусе. Когда магнит проходит мимо катушки, в ней наводится ЭДС в виде короткого импульса. Магниты во вращающейся части расположены между собой под углом  $180^\circ$ , а две катушки на корпусе – под углом  $90^\circ$ . После усиления с помощью усилителей  $У1$  и  $У2$  импульсы с генераторов опорных импульсов поступают на схему выработки опорного сигнала  $СВО$ . По сигналам  $ГОИ1$  и  $ГОИ2$  триггеры  $T1$  и  $T2$ , работающие в ждущем режиме, вырабатывают прямоугольные импульсы опорных напряжений, сдвинутые друг относительно друга на  $90^\circ$ .

Фазочувствительный демодулятор представляет собой схему сравнения (СС1 и СС2). На него поступают опорные напряжения с триггеров и усиленный сигнал с демодулятора, а на выходе получают постоянные напряжения  $U_1$  и  $U_2$ , пропорциональные угловым скоростям основания.

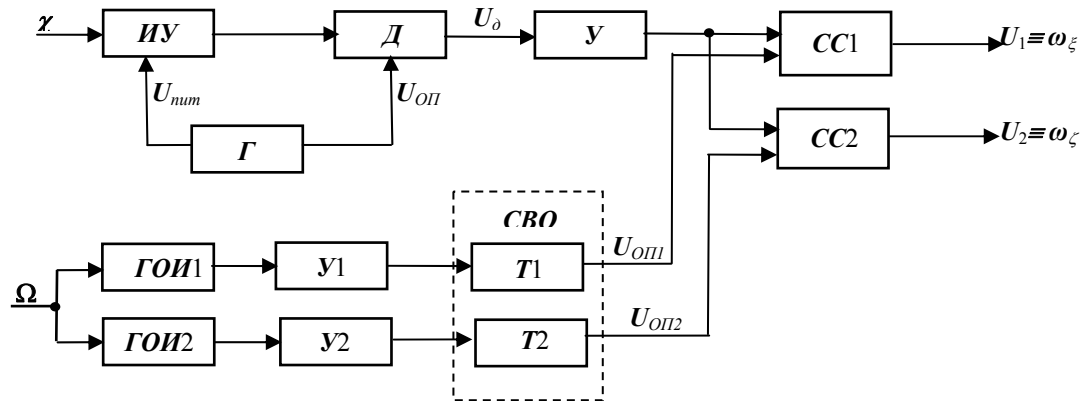


Рис. 7.6. Функциональная схема системы обработки информации

### 7.3. Уравнения движения роторного вибрационного гироскопа в невращающейся системе координат

Для получения уравнений движения РВГ в невращающейся системе координат введем переменные  $\alpha = -\chi \sin \Omega t$  и  $\beta = \chi \cos \Omega t$ , представленные на рисунке 7.7.

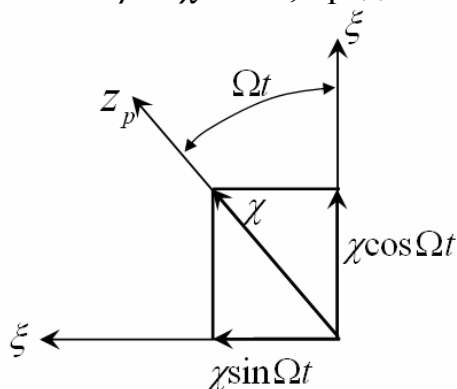


Рис. 7.7. Переменные в невращающейся системе координат

Умножив левую и правую части уравнения (7.4) на  $\sin \Omega t$  и  $\cos \Omega t$ , получим

$$\ddot{\chi} \sin \Omega t + 2d\omega_0 \dot{\chi} \sin \Omega t + \omega_0^2 \chi \sin \Omega t = \ddot{\chi} \sin \Omega t + 2d\omega_0 \dot{\chi} \sin \Omega t + \omega_0^2 \chi \sin \Omega t =$$

$$= \frac{\lambda \Omega}{2} (\omega_\xi - \omega_\xi \cos 2\Omega t + \omega_\zeta \sin 2\Omega t) - \frac{\dot{\omega}_\xi}{2} \sin 2\Omega t + \frac{\dot{\omega}_\zeta}{2} - \frac{\dot{\omega}_\zeta}{2} \cos 2\Omega t; \quad (7.10)$$

$$\ddot{\chi} \cos \Omega t + 2d\omega_0 \dot{\chi} \cos \Omega t + \omega_0^2 \chi \cos \Omega t = \frac{\lambda \Omega}{2} (\omega_\xi \sin 2\Omega t + \omega_\zeta + \omega_\zeta \cos 2\Omega t) -$$

$$- \frac{\dot{\omega}_\xi}{2} - \frac{\dot{\omega}_\xi}{2} \cos 2\Omega t + \frac{\dot{\omega}_\zeta}{2} \sin 2\Omega t. \quad (7.11)$$

Запишем уравнения (7.10) и (7.11) в переменных  $\alpha$  и  $\beta$ , для чего получим следующие соотношения

$$\begin{aligned}\alpha &= -\chi \sin \Omega t; \\ \dot{\alpha} &= -\dot{\chi} \sin \Omega t - \chi \Omega \cos \Omega t; \\ \ddot{\alpha} &= -\ddot{\chi} \sin \Omega t - 2\dot{\chi} \Omega \cos \Omega t + \chi \Omega^2 \sin \Omega t; \\ \beta &= \chi \cos \Omega t; \\ \dot{\beta} &= \dot{\chi} \cos \Omega t - \chi \Omega \sin \Omega t; \\ \ddot{\beta} &= \ddot{\chi} \cos \Omega t - 2\dot{\chi} \Omega \sin \Omega t - \chi \Omega^2 \cos \Omega t,\end{aligned}$$

откуда имеем

$$\begin{aligned}\chi \sin \Omega t &= -\alpha; & \chi \cos \Omega t &= \beta; \\ \dot{\chi} \sin \Omega t &= -\dot{\alpha} - \Omega \beta; & \dot{\chi} \cos \Omega t &= \dot{\beta} - \Omega \alpha; \\ \ddot{\chi} \sin \Omega t &= -\ddot{\alpha} + \Omega^2 \alpha - 2\Omega \dot{\beta}; & \ddot{\chi} \cos \Omega t &= \ddot{\beta} - \Omega^2 \beta - 2\Omega \dot{\alpha}.\end{aligned}\quad (7.12)$$

Подставив выражения (7.12) в уравнения (7.10) и (7.11), получим

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} + 2\Omega \dot{\beta} + 2d\omega_0 \dot{\alpha} + 2d\omega_0 \Omega \beta + (\omega_0^2 - \Omega^2)\alpha &= -\frac{\lambda \Omega}{2}(\omega_\xi - \omega_\xi \cos 2\Omega t + \omega_\zeta \sin 2\Omega t) + \\ &+ \frac{\dot{\omega}_\xi}{2} \sin 2\Omega t - \frac{\dot{\omega}_\xi}{2} + \frac{\dot{\omega}_\zeta}{2} \cos 2\Omega t;\end{aligned}\quad (7.13)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\beta} - 2\Omega \dot{\alpha} + 2d\omega_0 \dot{\beta} - 2d\omega_0 \Omega \alpha + (\omega_0^2 - \Omega^2)\beta &= \frac{\lambda \Omega}{2}(\omega_\xi \sin 2\Omega t + \omega_\zeta + \omega_\zeta \cos 2\Omega t) - \\ &- \frac{\dot{\omega}_\xi}{2} - \frac{\dot{\omega}_\xi}{2} \cos 2\Omega t + \frac{\dot{\omega}_\zeta}{2} \sin 2\Omega t.\end{aligned}$$

Учитывая, что сигнал на двойной частоте вращения ротора фильтруется, уравнения (7.13) запишем в виде:

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} + 2d\omega_0 \dot{\alpha} + (\omega_0^2 - \Omega^2)\alpha + 2\Omega \dot{\beta} + 2d\omega_0 \Omega \beta &= -\frac{\lambda \Omega}{2} \omega_\xi - \frac{\dot{\omega}_\xi}{2}; \\ \ddot{\beta} + 2d\omega_0 \dot{\beta} + (\omega_0^2 - \Omega^2)\beta - 2\Omega \dot{\alpha} - 2d\omega_0 \Omega \alpha &= \frac{\lambda \Omega}{2} \omega_\zeta - \frac{\dot{\omega}_\zeta}{2}.\end{aligned}\quad (7.14)$$

Полученная система уравнений – **система дифференциальных уравнений с линейными перекрестными связями.**

#### 7.4. Передаточные функции прибора

Запишем главный определитель и определители замещения системы уравнений (7.14).

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} p^2 + 2d\omega_0 p + (\omega_0^2 - \Omega^2) & -(2\Omega p + 2d\omega_0 \Omega) \\ 2\Omega p + 2d\omega_0 \Omega & p^2 + 2d\omega_0 p + (\omega_0^2 - \Omega^2) \end{vmatrix} = \\ &= [p^2 + 2d\omega_0 p + (\omega_0^2 - \Omega^2)]^2 + (2\Omega p + 2d\omega_0 \Omega)^2;\end{aligned}\quad (7.15)$$

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} -\frac{\lambda\Omega}{2}\omega_\xi - \frac{p}{2}\omega_\zeta & -(2\Omega p + 2d\omega_0\Omega) \\ \frac{\lambda\Omega}{2}\omega_\zeta - \frac{p}{2}\omega_\xi & p^2 + 2d\omega_0 p + (\omega_0^2 - \Omega^2) \end{vmatrix} =$$

$$= -\left\{ \frac{\lambda\Omega}{2}[p^2 + 2d\omega_0 p + (\omega_0^2 - \Omega^2)] + \frac{p(2\Omega p + 2d\omega_0\Omega)}{2} \right\} \omega_\xi -$$

$$-\left\{ \frac{p[p^2 + 2d\omega_0 p + (\omega_0^2 - \Omega^2)]}{2} - \frac{\lambda\Omega}{2}(2\Omega p + 2d\omega_0\Omega) \right\} \omega_\zeta; \quad (7.16)$$

$$\Delta_\beta = \begin{vmatrix} p^2 + 2d\omega_0 p + (\omega_0^2 - \Omega^2) & -\frac{\lambda\Omega}{2}\omega_\xi - \frac{p}{2}\omega_\zeta \\ (2\Omega p + 2d\omega_0\Omega) & \frac{\lambda\Omega}{2}\omega_\zeta - \frac{p}{2}\omega_\xi \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \frac{\lambda\Omega}{2}[p^2 + 2d\omega_0 p + (\omega_0^2 - \Omega^2)] + \frac{p(2\Omega p + 2d\omega_0\Omega)}{2} \right\} \omega_\zeta - \quad (7.17)$$

$$-\left\{ \frac{p[p^2 + 2d\omega_0 p + (\omega_0^2 - \Omega^2)]}{2} - \frac{\lambda\Omega}{2}(2\Omega p + 2d\omega_0\Omega) \right\} \omega_\xi.$$

Из выражений (7.15) и (7.16) получим прямую и перекрестную передаточные функции

$$W_{\alpha,\omega_\xi}(p) = -\left\{ \frac{\lambda\Omega}{2\Delta}[p^2 + 2d\omega_0 p + (\omega_0^2 - \Omega^2)] + \frac{p(2\Omega p + 2d\omega_0\Omega)}{2\Delta} \right\};$$

$$W_{\alpha,\omega_\zeta}(p) = -\left\{ \frac{p[p^2 + 2d\omega_0 p + (\omega_0^2 - \Omega^2)]}{2\Delta} - \frac{\lambda\Omega}{2\Delta}(2\Omega p + 2d\omega_0\Omega) \right\}$$

или после преобразований

$$W_{\alpha,\omega_\xi}(p) = -\frac{\Omega[(\lambda + 2)p^2 + 2d\omega_0(\lambda + 1)p + \lambda(\omega_0^2 - \Omega^2)]}{2\{[p^2 + 2d\omega_0 p + (\omega_0^2 - \Omega^2)]^2 + (2\Omega p + 2d\omega_0\Omega)^2\}};$$

$$W_{\alpha,\omega_\zeta}(p) = -\frac{p^3 + 2d\omega_0 p^2 + [(\omega_0^2 - \Omega^2) - 2\lambda\Omega^2]p - \lambda\Omega 2d\omega_0}{2\{[p^2 + 2d\omega_0 p + (\omega_0^2 - \Omega^2)]^2 + (2\Omega p + 2d\omega_0\Omega)^2\}}.$$

## 7.5. Собственные частоты прибора

Воспользовавшись выражением для главного определителя, запишем характеристическое уравнение

$$[\lambda^2 + 2d\omega_0\lambda + (\omega_0^2 - \Omega^2)]^2 + (2\Omega\lambda + 2d\omega_0\Omega)^2 = 0.$$

Для определения корней характеристического уравнения положим  $d = 0$ .

$$\lambda^4 + 2(\omega_0^2 + \Omega^2)\lambda^2 + (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 = 0.$$



Введя переменную  $x = \lambda^2$  получим уравнение

$$x^2 + 2(\omega_0^2 + \Omega^2)x + (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 = 0,$$

корни которого запишем в виде

$$x_{1,2} = -(\omega_0 \pm \Omega)^2,$$

откуда

$$\lambda_1 = -i(\omega_0 + \Omega);$$

$$\lambda_2 = -i(\omega_0 - \Omega).$$

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. На какие две группы делятся вибрационные гироскопы в зависимости от характера движения чувствительного элемента?
2. Какие виды связи различают у роторных вибрационных гироскопов?
3. Какие преимущества имеют динамически настраиваемые гироскопы по сравнению с гироскопами в кардановом подвесе?
4. В каких системах координат записываются уравнения движения роторных вибрационных гироскопов?
5. В чем состоит суть резонансной настройки роторного вибрационного гироскопа?
6. Какие требования предъявляются к измерителям угла роторных вибрационных гироскопов?

## 8. ДИНАМИЧЕСКИ НАСТРАИВАЕМЫЕ ГИРОСКОПЫ

Рассмотрим ДНГ с одноколечным подвесом (см. рис. 7.2, б)). Изучение свойств этого гироскопа будем проводить при следующих внешних воздействиях: основание прибора, с которым связана система координат  $\xi\eta\zeta$ , совершает в инерциальном пространстве только угловое движение, которое полностью определяется вектором  $\bar{\omega}$ , имеющим на оси  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  проекции  $\omega_\xi$ ,  $\omega_\eta$ ,  $\omega_\zeta$  соответственно. Сам гироскоп характеризуется конструктивными и физико-механическими свойствами, среди которых можно выделить необходимые для вывода динамических уравнений:

- отсутствуют радиальные и осевые смещения центров тяжести кольца и ротора относительно центров их подвесов;
- центры подвесов кольца и ротора находятся в одной точке, лежащей на оси вращения вала;
- радиальные и осевые биения вала в опорах исключены;
- мощности приводного двигателя гироскопа достаточно, чтобы поддерживать постоянство скорости вращения вала;
- упругие элементы имеют конечные жесткости на кручение только относительно одной из осей, относительно двух других, связанных с упругим элементом, жесткость предполагается бесконечно большой, а соответствующие угловые перемещения кольца или ротора относительно этих двух осей равны нулю;
- линейные жесткости упругих элементов относительно всех осей бесконечны, а соответствующие линейные смещения кольца или ротора равны нулю;
- температура внутри корпуса ДНГ в течение всего времени его работы остается постоянной.

### 8.1. Уравнения движения одноколечного динамически настраиваемого гироскопа

Для описания положения вала, кольца и ротора относительно основания гироскопа, а также их взаимного расположения введены в рассмотрение системы координат (рис. 8.1):

$x_e, y_e, z_e$  – система координат, связанная с валом;

$x_1, y_1, z_1$  – система координат, связанная с кольцом;

$x_p, y_p, z_p$  – система координат, связанная с ротором;

$\varphi$  – угол поворота вала относительно основания гироскопа;

$\chi$  – угол поворота кольца относительно вала;

$\varepsilon$  – угол поворота ротора относительно кольца;

$\Omega, \dot{\chi}, \dot{\varepsilon}$  – угловые скорости вала, кольца и ротора соответственно.

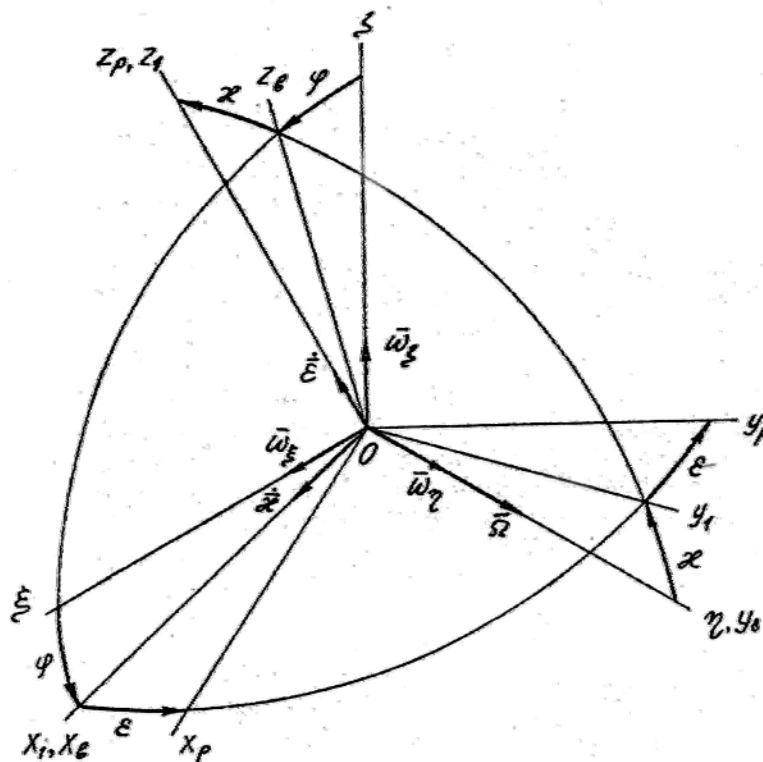


Рис. 8.1. Системы координат для вывода уравнений движения ДНГ с одноколечным подвесом

Уравнения движения в данном случае можно получить из динамических уравнений Эйлера, описывающих отдельно движение кольца и ротора как абсолютно твердых тел с одной неподвижной точкой. Для этого необходимо разорвать связи между кольцом и ротором, а также между кольцом и валом, а их действие заменить реакциями. На рисунке 8.2 представлена схема приложения реакций связей, действующих со стороны кольца на ротор ( $\bar{M}_{pxp}, \bar{M}_{pyp}$ ) и со стороны упругих элементов на ротор ( $\bar{M}_{pzp}$ ). Если первые два момента вызваны непосредственным воздействием кольца на ротор вследствие бесконечной линейной и изгибной жесткости упругих элементов, то третий – наоборот, конечной их жесткостью на кручение относительно оси  $z_p$ . Реакции сил на рисунке не показаны, т.к. при сделанных предположениях они не создают момента, действующего на ротор. Аналогично для кольца на рисунке 8.3 изображены только моментные составляющие, среди которых можно выделить составляющие, действующие со стороны ротора на кольцо –  $\bar{M}_{кx1}, \bar{M}_{кy1}$ , со стороны вала на кольцо –  $\bar{M}_{квz1}, \bar{M}_{квz1}$  и со стороны упругих элементов (за счет их крутильных деформаций) на кольцо –  $\bar{M}_{кx1}, \bar{M}_{кy1}$ . главные центральные моменты инерции ротора и кольца указаны в скобках у соответствующих осей (см. рис. 8.2 и 8.3).

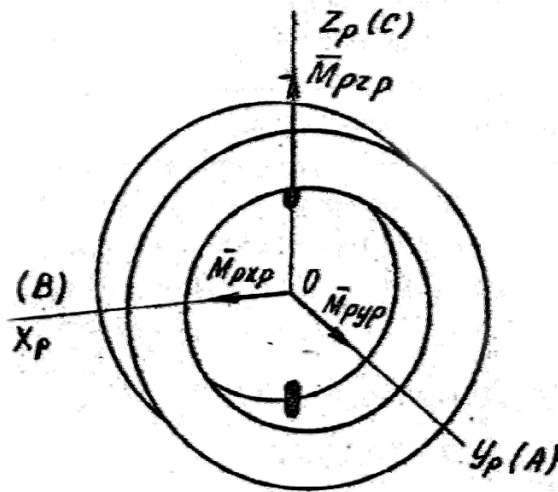


Рис. 8.2. Схема приложения реакции связей, действующих на ротор

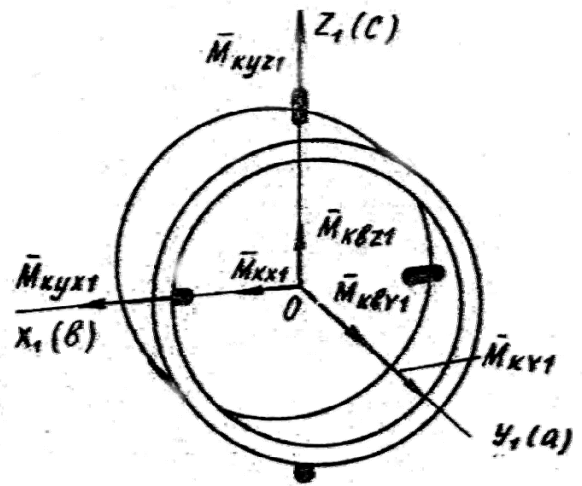


Рис. 8.3. Схема приложения реакции связей, действующих на кольцо

Динамические уравнения Эйлера для ротора в связанной с ним системе координат будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} B\dot{\omega}_{pxp} + (C - A)\omega_{pyy} \omega_{pzp} &= M_{pxp}, \\ A\dot{\omega}_{pyy} + (B - C)\omega_{pxp} \omega_{pzp} &= M_{pyy}, \\ C\dot{\omega}_{pzp} + (A - B)\omega_{pxp} \omega_{pyy} &= M_{pzp}, \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

где  $\omega_{pxp}$ ,  $\omega_{pyy}$ ,  $\omega_{pzp}$  – проекции абсолютной угловой скорости ротора на соответствующие оси,  $M_{pxp}$ ,  $M_{pyy}$ ,  $M_{pzp}$  – проекции моментов реакции связей, действующих со стороны кольца на ротор.

Три аналогичных уравнения можно записать и для кольца, но практический интерес представляет его движение только относительно оси  $x_1$ :

$$b\dot{\omega}_{1x1} + (c - a)\omega_{1y1} \omega_{1z1} = M_{kx1} + M_{кyx1}, \quad (8.2)$$

где  $\omega_{1x1}$ ,  $\omega_{1y1}$ ,  $\omega_{1z1}$  – проекции абсолютной угловой скорости кольца на соответствующие оси,  $M_{kx1}$ ,  $M_{кyx1}$  – проекции моментов реакций связей, действующих на кольцо со стороны ротора и упругого элемента соответственно. Необходимость в остальных двух уравнениях отпадает вследствие равенства нулю угловых отклонений кольца относительно оси  $y_1$  и  $z_1$ .

Для получения дифференциальных уравнений движения относительно входных и выходных координат гироскопа необходимо найти проекции абсолютных угловых скоростей элементов гироскопа на связанные с ним оси. Используя рисунок 8.1, запишем угловую скорость движения кольца в проекциях на оси  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ :

$$\left. \begin{aligned} \omega_{1x1} &= \dot{\chi} + \omega_{\xi} \cos \varphi - \omega_{\zeta} \sin \varphi, \\ \omega_{1y1} &= (\Omega + \omega_{\eta}) \cos \chi + \omega_{\zeta} \sin \chi \cos \varphi - \omega_{\xi} \sin \chi \sin \varphi, \\ \omega_{1z1} &= \omega_{\zeta} \cos \chi \cos \varphi - (\Omega + \omega_{\eta}) \sin \chi + \omega_{\xi} \cos \chi \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

Аналогично получаем угловую скорость ротора гироскопа в проекциях на оси  $x_p, y_p, z_p$ :

$$\left. \begin{aligned} \omega_{pxp} &= (\dot{\chi} + \omega_\xi \cos \varphi - \omega_\zeta \sin \varphi) \cos \varepsilon + [(\Omega + \omega_\eta) \cos \chi + \omega_\zeta \sin \chi \cos \varphi + \omega_\xi \sin \chi \sin \varphi] \sin \varepsilon, \\ \omega_{pyp} &= [(\Omega + \omega_\eta) \cos \chi + \omega_\zeta \sin \chi \cos \varphi + \omega_\xi \sin \chi \sin \varphi] \cos \varepsilon - (\dot{\chi} + \omega_\xi \cos \varphi - \omega_\zeta \sin \varphi) \sin \varepsilon, \\ \omega_{pzp} &= \dot{\varepsilon} + \omega_\zeta \cos \chi \cos \varphi - (\Omega + \omega_\eta) \sin \chi + \omega_\xi \cos \chi \sin \varphi. \end{aligned} \right\} (8.4)$$

Обратимся теперь к правым частям уравнений (8.1) и (8.2). Моменты  $M_{pzp}$ , действующий на ротор, и  $M_{кyx1}$ , действующий на кольцо, вызваны деформацией упругих элементов. Например, при использовании торсионов, как показано на рисунках 8.2 и 8.3, относительное движение элементов подвеса ДНГ возможно при закручивании таких упругих элементов. В результате появляется момент, пропорциональный углу закручивания торсионов (упругий момент), и демпфирующий момент, обусловленный вязким трением в материале упругих элементов:

$$M_{pzp} = -c_p \varepsilon - k_{op} \dot{\varepsilon}, \quad (8.5)$$

$$M_{кyx1} = -c_k \chi - k_{ok} \dot{\chi}, \quad (8.6)$$

где  $c_p$  – угловая жесткость упругих элементов, соединяющих ротор с кольцом;  $c_k$  – угловая жесткость упругих элементов, соединяющих кольцо с валом;  $k_{op}$  и  $k_{ok}$  – коэффициенты вязкого трения в материале соответствующих упругих элементов. Отметим, что для снижения дрейфа гироскопа их стремятся сделать как можно меньше. С этой целью воздух из рабочей камеры ДНГ откачивают, а материал упругих элементов подбирают так, чтобы потери на внутреннее трение были минимальными. При этих условиях можно считать, что  $k_{op}$  и  $k_{ok}$  являются коэффициентами демпфирования, обусловленными внутренним трением и вязкостью газовой среды, в которой находятся указанные элементы гироскопа.

Моменты  $M_{pxp}$  и  $M_{pyp}$  вызваны воздействием кольца на ротор через абсолютно жесткие на изгиб упругие элементы, а  $M_{кx1}$  – наоборот, ротора на кольцо. При этом справедливо равенство

$$M_{pxp} = M_{px1} \cos \varepsilon + M_{py1} \sin \varepsilon, \quad (8.7)$$

где  $M_{px1}$  и  $M_{py1}$  – моменты реакции кольца на ротор в проекциях на соответствующие оси. Для упрощения дальнейших вкладок будем считать, что  $M_{py1} = 0$ , т.к. мощности приводного двигателя достаточно для компенсации любых моментов, возникающих относительно оси вращения вала. Кроме того, необходимо учесть, что момент, действующий со стороны кольца на ротор, равен по величине моменту, действующему со стороны ротора на кольцо, и противоположен по знаку:

$$M_{px1} = -M_{кx1}. \quad (8.8)$$

На основании сделанных выше замечаний равенство (8.7) запишем в следующем виде:

$$M_{pxp} = -M_{кx1} \cos \varepsilon. \quad (8.9)$$

Таким образом, система уравнений, описывающая движение ротора, может быть представлена первым и третьим уравнением системы (8.1). Второе же уравнение этой системы не представляет интереса в силу постоянства угловой скорости вращения вала. Правая часть первого уравнения может быть выражена через уравнение (8.2) – см. равенство (8.9). Поскольку в существующих конструкциях ДНГ углы отклонения кольца и ротора не превышают 20...30 угловых минут, можно полагать, что  $\sin \chi \approx \chi$ ,  $\cos \chi \approx 1$ ,  $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$ ,  $\cos \varepsilon \approx 1$ . Кроме того, вследствие наложенных условий  $\varphi = \Omega \cdot t$ . Подставляя выражения для проекций угловых скоростей элементов ДНГ (8.3) и (8.4) в уравнения (8.1) и (8.2), учитывая равенства (8.5), (8.6) и (8.9) и сделанные выше предположения, получаем систему уравнений, описывающих движение ротора гироскопа во вращающейся вместе с валом системе координат:

$$\left. \begin{aligned}
 & B\{\ddot{\chi} + \dot{\omega}_\varepsilon \cos \varphi - \omega_\varepsilon \Omega \sin \varphi - \dot{\omega}_\zeta \sin \varphi - \omega_\zeta \Omega \cos \varphi - (\dot{\chi} + \omega_\varepsilon \cos \varphi - \omega_\zeta \sin \varphi)\dot{\varepsilon}\varepsilon + \\
 & + [\dot{\omega}_\eta - (\Omega + \omega_\eta)\dot{\chi}\chi + \dot{\omega}_\zeta \chi \cos \varphi + \omega_\zeta \dot{\chi} \cos \varphi - \omega_\zeta \Omega \chi \sin \varphi + \dot{\omega}_\varepsilon \chi \sin \varphi + \\
 & + \omega_\varepsilon \dot{\chi} \sin \varphi + \omega_\varepsilon \Omega \chi \cos \varphi]\varepsilon + (\Omega + \omega_\eta + \omega_\zeta \chi \cos \varphi + \omega_\varepsilon \chi \sin \varphi)\dot{\varepsilon}\} + \\
 & + (C - A)[\Omega + \omega_\eta + \omega_\zeta \chi \cos \varphi + \omega_\varepsilon \chi \sin \varphi - (\dot{\chi} + \omega_\varepsilon \cos \varphi - \omega_\zeta \sin \varphi)\varepsilon] \times \\
 & \times [\dot{\varepsilon} + \omega_\zeta \cos \varphi - (\Omega + \omega_\eta)\chi + \omega_\varepsilon \sin \varphi] = -M_{\kappa\alpha 1}, \\
 \\
 & C[\ddot{\varepsilon} + \dot{\omega}_\zeta \cos \varphi - \omega_\zeta \dot{\chi}\chi \cos \varphi - \omega_\zeta \Omega \sin \varphi - \dot{\omega}_\eta \chi - (\Omega + \omega_\eta)\dot{\chi} + \dot{\omega}_\varepsilon \sin \varphi - \omega_\varepsilon \dot{\chi}\chi \sin \varphi + \\
 & + \omega_\varepsilon \chi \cos \varphi] + (A - B)[\dot{\chi} + \omega_\varepsilon \cos \varphi - \omega_\zeta \sin \varphi + (\Omega + \omega_\eta + \omega_\zeta \chi \cos \varphi + \omega_\varepsilon \chi \sin \varphi)\varepsilon] \times \\
 & \times [\Omega + \omega_\eta + \omega_\zeta \chi \cos \varphi + \omega_\varepsilon \chi \sin \varphi - (\dot{\chi} + \omega_\varepsilon \cos \varphi - \omega_\zeta \sin \varphi)\varepsilon] = -c_p \varepsilon - k_{op} \dot{\varepsilon}, \\
 \\
 & b(\ddot{\chi} + \dot{\omega}_\varepsilon \cos \varphi - \omega_\varepsilon \Omega \sin \varphi - \dot{\omega}_\zeta \sin \varphi - \omega_\zeta \Omega \cos \varphi) + (c - a)(\Omega + \omega_\eta + \omega_\zeta \chi \cos \varphi + \omega_\varepsilon \chi \sin \varphi) \times \\
 & \times [\dot{\varepsilon} + \omega_\zeta \cos \varphi - (\Omega + \omega_\eta)\chi + \omega_\varepsilon \sin \varphi] = M_{\kappa\alpha 1} - c_\kappa \chi - k_{ок} \dot{\chi}.
 \end{aligned} \right\} (8.10)$$

Система (8.10) представляет собой полные нелинейные дифференциальные уравнения, достаточно сложные для аналитического исследования. Для упрощения их анализа необходимо наложить дополнительные условия. Во-первых, при существующих углах отклонения  $\chi$  и  $\varepsilon$  моменты, пропорциональные им и их производным, можно считать малыми величинами первого порядка. Тогда все члены, пропорциональные этим углам и их производным в степени выше первой, а также их произведениям, будут величинами второго и выше порядка малости и не окажут существенного влияния на решение системы уравнений (8.10). Во-вторых, вполне естественным является предположение о том, что  $\omega_\varepsilon \ll \Omega$ ,  $\omega_\eta \ll \Omega$  и  $\omega_\zeta \ll \Omega$ . Тогда квадратичные члены, содержащие проекции угловой скорости разворота основания, также можно считать величинами второго порядка малости. Учитывая эти замечания и подставляя момент  $M_{\kappa\alpha 1}$  из последнего уравнения системы в первое, получаем линеаризованные уравнения движения ротора ДНГ:

$$\begin{aligned}
& (B+b)\ddot{\chi} + (B+C-A)\Omega\dot{\varepsilon} + k_{\text{ок}}\dot{\chi} + (A-C+a-c)\Omega^2\chi + c_k\chi = \\
& = -(B+b)(\dot{\omega}_\xi \cos \Omega t - \dot{\omega}_\zeta \sin \Omega t) + (A+B-C+a+b-c)\Omega(\omega_\xi \sin \Omega t + \omega_\zeta \cos \Omega t), \\
& C\ddot{\varepsilon} - (B+C-A)\Omega\dot{\chi} + k_{\text{оп}}\dot{\varepsilon} + (A-B)\Omega^2\varepsilon + c_p\varepsilon = \\
& = -c(\dot{\omega}_\xi \sin \Omega t + \dot{\omega}_\zeta \cos \Omega t) - (A-B+C)\Omega(\omega_\xi \cos \Omega t + \omega_\zeta \sin \Omega t).
\end{aligned} \tag{8.11}$$

Система уравнений (8.11) описывает движение ротора гироскопа относительно приводного вала. Съем же информации проще осуществлять относительно корпуса прибора, что чаще всего и делают. Поэтому полученные уравнения необходимо записать в системе координат  $\xi\eta\zeta$ , связанной с основанием ДНГ. Для малых углов  $\kappa$  и  $\varepsilon$  справедливо преобразование координат (рис. 8.4):

$$\left. \begin{aligned}
\alpha &= \chi \cos \Omega t + \varepsilon \sin \Omega t, \\
\beta &= \varepsilon \cos \Omega t - \chi \sin \Omega t,
\end{aligned} \right\} \tag{8.12}$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – углы отклонения ротора относительно осей  $\xi$  и  $\zeta$  соответственно (при выбранном направлении этих углов угловые скорости  $\dot{\alpha}$  и  $\dot{\beta}$ , направленные по указанным осям, имеют положительную величину).

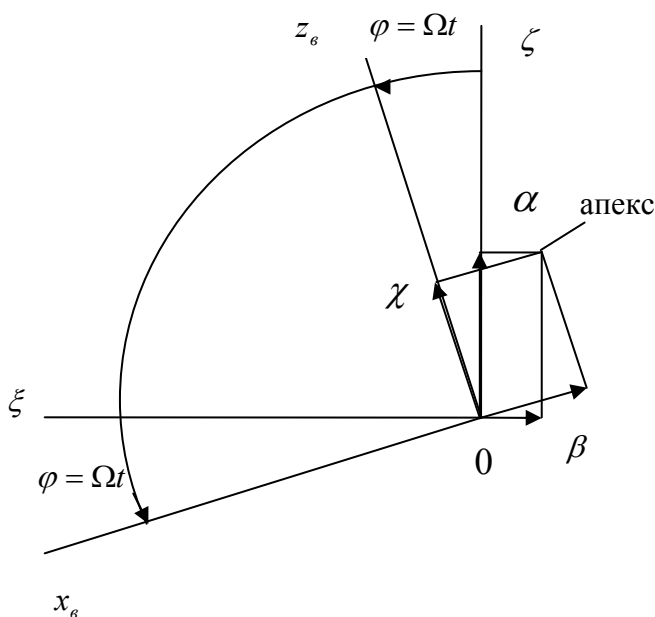


Рис. 8.4. Угловые координаты апекса гироскопа на картинной плоскости

Выразив из соотношений (8.12)  $\chi$  и  $\varepsilon$  и подставив их в систему (8.11), можно получить необходимые уравнения относительно системы координат, относительно осей  $\xi$  и  $\zeta$ .  
EMBED Equation.3  $\chi$  и  $\varepsilon$  и подставив их в систему (8.11), можно получить необходимые уравнения относительно системы координат, относительно осей  $\xi$  и  $\zeta$ .  
EMBED Equation.3  $\chi$  и  $\varepsilon$  и подставив их в систему (8.11), можно получить необходимые уравнения относительно системы координат, относительно осей  $\xi$  и  $\zeta$ .  
EMBED Equation.3  $\chi$  и  $\varepsilon$  и подставив их в систему (8.11), можно получить необходимые уравнения относительно системы координат, относительно осей  $\xi$  и  $\zeta$ .

Для упрощения их исследования введем в рассмотрение комплексные координаты  $\psi$  и  $\theta$ , причем

$$\psi = \varepsilon + j\chi, \tag{8.13}$$

$$\theta = \beta + j\alpha, \tag{8.14}$$

где  $\psi$  характеризует отклонение ротора гироскопа относительно вращающейся вместе с валом системы координат, а  $\theta$  – относительно системы координат, связанной с основанием ДНГ. Умножая первое равенство системы (8.12) на  $j = \sqrt{-1}$  и складывая со вторым, подставив при этом (8.13) и (8.14), получаем

$$\theta = \psi(\cos \Omega t + j \sin \Omega t) = \psi \cdot e^{j\Omega t}. \quad (8.15)$$

Из (8.15) можно получить обратное преобразование:

$$\psi = \theta \cdot e^{-j\Omega t}. \quad (8.16)$$

Так как при любых конечных значениях времени  $e^{-j\Omega t} \neq 0$ , соотношения (8.15) и (8.16) являются взаимно однозначными преобразованиями угловых координат в комплексной области.

Для приведения двух уравнений системы (8.11) к одному относительно комплексной переменной  $\psi$  умножим первое на  $j$  и сложим со вторым. При этом будем использовать тождество

$$F_1 x + jF_2 y = \frac{F_1 + F_2}{2} z + \frac{F_1 - F_2}{2} \bar{z},$$

которое читатель без труда может доказать самостоятельно. Здесь  $z = x + jy$ , а  $\bar{z} = x - jy$  – комплексно сопряженная переменная. В результате очевидных преобразований получим:

$$\begin{aligned} & \frac{B+b+c}{2} \ddot{\psi} - \frac{B+b-c}{2} \ddot{\bar{\psi}} + j(B+C-A)\Omega \dot{\psi} + \frac{2A+a-B-C-c}{2} \Omega^2 \psi + \\ & + \frac{C-B+C-a}{2} \Omega^2 \bar{\psi} + \frac{c_\kappa + c_p}{2} \psi + \frac{c_\kappa - c_p}{2} \bar{\psi} + \frac{k_{ок} + k_{оп}}{2} \dot{\psi} + \frac{k_{ок} - k_{оп}}{2} \dot{\bar{\psi}} = \\ & = \frac{2B-2C+a+b-c}{2} \Omega \omega_\xi \cdot e^{j\Omega t} - \frac{2A+a+b-c}{2} \Omega \omega_\xi \cdot e^{-j\Omega t} - j \frac{B-C+b}{2} \dot{\omega}_\xi \cdot e^{j\Omega t} - \\ & - j \frac{B+C+b}{2} \dot{\omega}_\xi \cdot e^{-j\Omega t} + \frac{B-C+b}{2} \dot{\omega}_\zeta \cdot e^{j\Omega t} - \frac{B+b+C}{2} \dot{\omega}_\zeta \cdot e^{-j\Omega t} + \\ & + j \frac{2B-2C+a+b-c}{2} \Omega \omega_\zeta \cdot e^{j\Omega t} + j \frac{2A+a+b-c}{2} \Omega \omega_\zeta \cdot e^{-j\Omega t}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Для упрощения дальнейших выкладок будем считать, что ротор и кольцо симметричным относительно любой экваториальной оси, проведенной через центр масс. При этом  $B = C$  и  $b = c$ . Предположим также, что механические свойства всех упругих элементов одинаковы, т.е.  $c_\kappa = c_p = c_0$  и  $k_{оп} = k_{ок} = k_0$ . Такой прибор в литературе часто называют гироскопом Хоува (иногда встречается транскрипция "гироскоп Хоува") по фамилии его изобретателя.

Подставляя (8.16) в уравнение (8.17) и умножая его правую и левую части на  $e^{j\Omega t}$ , получаем:



$$\begin{aligned}
& \frac{2B+b}{2}\ddot{\theta} - j(2b+b)\Omega\dot{\theta} - \frac{2B+b}{2}\Omega^2\theta - \frac{b}{2}\ddot{\theta} \cdot e^{2j\Omega t} - jb\Omega\dot{\theta} \cdot e^{2j\Omega t} + \frac{b}{2}\Omega^2\bar{\theta} \cdot e^{2j\Omega t} + \\
& + j(2B-A)\Omega\dot{\theta} + (2B-A)\Omega^2\theta + \frac{2A-2B+a-b}{2}\Omega^2\theta - \frac{a-b}{2}\Omega^2\bar{\theta} \cdot e^{2j\Omega t} + c_0\theta + k_0\dot{\theta} - \\
& - jk_0\Omega\theta = -j\frac{2B+b}{2}\dot{\omega}_\xi - j\frac{b}{2}\dot{\omega}_\xi \cdot e^{2j\Omega t} - \frac{2B+b}{2}\dot{\omega}_\zeta + \frac{b}{2}\dot{\omega}_\zeta \cdot e^{2j\Omega t} - \frac{2A+a}{2}\Omega\omega_\xi + \\
& + \frac{a}{2}\Omega\omega_\xi \cdot e^{2j\Omega t} + j\frac{2A+a}{2}\Omega\omega_\zeta + j\frac{a}{2}\Omega\omega_\zeta \cdot e^{2j\Omega t}.
\end{aligned} \tag{8.18}$$

Введем далее следующие обозначения:  $\omega_{\zeta\xi} = \omega_\zeta + j\omega_\xi$ ,  $\dot{\omega}_{\zeta\xi} = \dot{\omega}_\zeta + j\dot{\omega}_\xi$ . Приведа в (8.18) подобные члены и умножая правую и левую его части на 2, получаем:

$$\begin{aligned}
& (2B+b)\ddot{\theta} - [2j\Omega(A+b) - 2k_0]\dot{\theta} + [2c_0 - (2b-a)\Omega^2 - 2j\Omega k_0]\theta + \\
& + \left[ -b\ddot{\theta} - 2j\Omega b\dot{\theta} + (2b-a)\Omega^2\bar{\theta} \right] \cdot e^{2j\Omega t} = \\
& = -(2B+b)\dot{\omega}_{\zeta\xi} + j(2A+a)\Omega\omega_{\zeta\xi} + \left[ b\dot{\omega}_{\zeta\xi} + j\Omega a\bar{\omega}_{\zeta\xi} \right] \cdot e^{2j\Omega t}.
\end{aligned} \tag{8.19}$$

Рассмотрим вначале левую часть полученного уравнения, описывающую собственное движение гироскопа Хоува. Первый член является инерционным моментом, первое слагаемое второго члена – гироскопический момент, второе – демпфирующий. Похожие моменты присутствуют и в классическом трехстепенном гироскопе. Остальные члены являются специфическими для динамически настраиваемых гироскопов:  $c_0\theta$  – упругий момент,  $(2b-a)\Omega^2\bar{\theta}$  – псевдоупругий динамический момент,  $j\Omega k_0\theta$  – проекция демпфирующего момента на плоскость, проходящую через оси  $\xi$  и  $\zeta$ . Три члена, стоящие в квадратных скобках и содержащие комплексно сопряженную переменную  $\theta$  и ее производные, отражают вибрационное движение ротора ДНГ с частотой колебаний, равной удвоенной частоте вращения вала. Так как моменты инерции ротора значительно превышают моменты инерции кольца, эти члены вызывают колебания ротора достаточно малой амплитуды (см. рис. 7.2, б)). Если пренебречь демпфированием и вибрационными членами, то для компенсации упругого момента динамическим необходимо выполнить условие

$$2c_0 - (2b-a)\Omega^2 = 0. \tag{8.20}$$

Как уже отмечалось, соотношение (8.20) – это **условие динамической настройки**, являющееся, однако, приближенным вследствие принятых допущений.

В правой части уравнения (8.19) стоят моменты, возникающие из-за воздействия переносной угловой скорости разворота основания на гироскоп. Первые два из них соответствуют величине и скорости изменения угловой скорости с частотой этого изменения. Два других являются вибрационными моментами, действующими на ротор с частотой, равной удвоенной частоте вращения вала. В силу того, что инерционность ротора значительно больше инерционности кольца, амплитуда указанных вибрационных моментов достаточно мала. Так, при постоянной угловой скорости разворота основания на

ротор гироскопа будет действовать постоянный момент, пропорциональный этой скорости, и гармонический, амплитуда которого так же пропорциональна указанной угловой скорости, а частота равна удвоенной частоте вращения вала. Таким образом, как собственное, так и вынужденное движение гироскопа складывается из прецессионной и вибрационной составляющей (см. рис. 7.2, б)), что послужило основой для отнесения такого ДНГ к прецессионно-вибрационным.

## 8.2. Передаточные функции одноколечного ДНГ

Для исследования динамики гироскопа Хоува запишем уравнение (8.19) в области изображений при нулевых начальных условиях, применив при этом известное свойство сдвига аргумента ( $e^{at} f(t) = F(p - a)$ ):

$$\begin{aligned} & [(2B + b)p^2 - 2j\Omega(A + b)p + 2k_0p + 2c_0 - (2b - a)\Omega^2 - 2j\Omega k_0] \theta(p) + \\ & + [-b(p - 2j\Omega)^2 - 2j\Omega b(p - 2j\Omega) + (2b - a)\Omega^2] \bar{\theta}(p - 2j\Omega) = \\ & = [-(2B + b)p + j(2A + a)\Omega] \omega_{\zeta\xi}(p) + [b(p - 2j\Omega) + j\Omega a] \bar{\omega}_{\zeta\xi}(p - 2j\Omega). \end{aligned}$$

Полученное уравнение преобразуем к более компактной форме записи:

$$\tau_1(p)\theta(p) + \tau_2(p)\bar{\theta}(p - 2j\Omega) = S_1(p)\omega_{\zeta\xi}(p) + S_2(p)\bar{\omega}_{\zeta\xi}(p - 2j\Omega), \quad (8.21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \tau_1(p) &= \tau_{1r}(p) + j\tau_{1i}(p); \\ \tau_2(p) &= \tau_{2r}(p) + j\tau_{2i}(p); \\ S_1(p) &= S_{1r}(p) + jS_{1i}(p); \\ S_2(p) &= S_{2r}(p) + jS_{2i}(p); \\ \tau_{1r}(p) &= (2B + b)p^2 + 2k_0p + 2c_0 - (2b - a)\Omega^2; \\ \tau_{1i}(p) &= -2(A + b)\Omega p - 2k_0\Omega; \\ \tau_{2r}(p) &= -bp^2 + (2b - a)\Omega^2; \\ \tau_{2i}(p) &= 2b\Omega p; \\ S_{1r}(p) &= -(2B + b)p; \\ S_{1i}(p) &= (2A + a)\Omega; \\ S_{2r}(p) &= bp; \\ S_{2i}(p) &= -(2b - a)\Omega. \end{aligned} \right\} \quad (8.22)$$

Рассмотрим приближенное решение уравнения (8.21). Основанием для него будет служить то обстоятельство, что вибрационные члены, как уже отмечалось, достаточно малы и ими можно пренебречь, тогда

$$\theta(p) = \frac{S_1(p)}{\tau_1(p)} \omega_{\zeta\xi}(p). \quad (8.23)$$

В этом равенстве первый сомножитель правой части является комплексной передаточной функцией.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Предположим, что  $2c_0 - (2b - a)\Omega^2 = 0$ , т.е. выполнено условие динамической настройки, а демпфирование отсутствует ( $k_0 = 0$ ). Тогда

$$\theta(p) = \frac{(2B + b)p - j\Omega(2A + a)}{(2B + b)p^2 - 2j\Omega(2A + a)p} \omega_{\zeta\zeta}(p) \approx -\frac{\omega_{\zeta\zeta}(p)}{p} \quad (8.24)$$

в силу того, что  $A \gg a$ ,  $A \gg b$ . С учетом (8.14) равенство (8.24) можно записать в координатной форме:

$$\alpha(p) = -\frac{\omega_{\xi}(p)}{p}; \quad (8.25)$$

$$\beta(p) = -\frac{\omega_{\zeta}(p)}{p}. \quad (8.26)$$

Соотношения (7.25) и (7.26) отражают астатические свойства гироскопа Хоува, работающего в режиме динамической настройки при полном отсутствии демпфирования, что возможно в глубоком вакууме с идеальными упругими элементами. При этом во временной области

$$\alpha(t) = -\int_0^t \omega_{\xi}(\tau) d\tau + \alpha_0; \quad (8.27)$$

$$\beta(t) = -\int_0^t \omega_{\zeta}(\tau) d\tau + \beta_0, \quad (8.28)$$

где  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  – начальные углы отклонения гироскопа при  $t = 0$ .

2. Будем теперь считать, что  $k_0 \neq 0$ , но в отличие от первого случая инерционные члены не учитываем. Условие динамической настройки считаем выполненным. В этом случае  $\theta(p) = -\frac{(2A + a)\Omega}{[2\Omega(A + 2b) + i2k_0]p + 2k_0\Omega} \omega_{\zeta\zeta}(p)$ .

Так как обычно  $\Omega(A + 2b) \gg k_0$ , то последнее соотношение можно упростить:

$$\theta(p) = -\frac{(2A + a)\Omega}{2(A + 2b)\Omega p + 2k_0\Omega} \omega_{\zeta\zeta}(p) = -\frac{k_{11}}{T_1 p + 1} \omega_{\zeta\zeta}(p), \quad (8.29)$$

где

$$k_{11} = \frac{2A + a}{2k_0}; \quad (8.30)$$

$$T_1 = \frac{A + 2b}{k_0}. \quad (8.31)$$

Или в координатной форме

$$\alpha(p) = -\frac{k_{11}}{T_1 p + 1} \omega_{\xi}(p); \quad (8.32)$$

$$\beta(p) = -\frac{k_{11}}{T_1 p + 1} \omega_{\zeta}(p). \quad (8.33)$$

Эти формулы указывают на то, что при учете демпфирования динамически настраиваемый гироскоп уже нельзя рассматривать как астатический. Реакция такого прибора на переносную угловую скорость является апериодической. Постоянную времени  $T_1$  будем называть постоянной времени тяжения, т.к. ее появление вызвано псевдоупругими моментами от демпфирования, а также, как это будет показано ниже, расстройкой. В литературе этот параметр часто называют просто постоянной времени. Она находится из формулы (8.31), а коэффициент передачи из (8.30). В динамически настраиваемых гироскопах, использующихся в гиросtabilизаторах в качестве чувствительных элементов, постоянную времени тяжения стараются сделать как можно больше, чтобы приблизить его к астатическому гироскопу. Воздействие демпфирования на поведение ДНГ можно рассматривать иначе, считая, что оно вызывает дрейф. Положив  $\omega_\xi = \omega_\zeta = 0$  из (8.32), получим:

$$(T_1 p + 1)\alpha(p) = 0.$$

Или во временной области

$$\dot{\alpha} = -\frac{\alpha}{T_1} = \frac{k_d}{A + 2b}\alpha.$$

Пусть  $\omega_\xi \neq 0 = const$ ,  $\omega_\zeta = 0$ . Тогда через достаточно большой промежуток времени появится установившаяся реакция гироскопа на входную угловую скорость. Применяя к равенству (8.32) теорему о предельном переходе, получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pk_{11}}{T_1 p + 1} \frac{\omega_\xi}{p} = \frac{2A + a}{2k_d} \omega_\xi. \quad (8.34)$$

Авторы предоставляют читателю возможность самостоятельно сравнить соотношения (8.34) и (8.20). Последнее выражение указывает на то, что идеально настроенный ДНГ является датчиком угловой скорости, постоянная времени которого равна  $T_1$ , и поскольку ее величина достаточно велика, реакция такого измерителя на входную угловую скорость затянута во времени.

Следовательно, полоса его пропускания мала, но чувствительность может быть достаточно большой вследствие малости коэффициента демпфирования.

Для построения более точных решений, чем (8.23), рассмотрим вновь уравнение (8.21). Цель преобразований, которые будут проделаны ниже, – выразить  $\theta(p)$ , исключив  $\bar{\theta}(p - 2j\Omega)$  из уравнения. Используя запись (8.21), получим равенство комплексно-сопряженных функций от правой и левой части:

$$\bar{\tau}_1(p)\bar{\theta}(p) + \bar{\tau}_2(p)\theta(p - 2j\Omega) = \bar{S}_1(p)\bar{\omega}_{\zeta\zeta}(p) + \bar{S}_2(p)\omega_{\zeta\zeta}(p - 2j\Omega). \quad (8.35)$$

В уравнение (8.35) вместо  $p$  подставим  $p - 2j\Omega$  (что эквивалентно умножению правой и левой частей уравнений во временной области на  $e^{2j\Omega t}$ ):

$$\bar{\tau}_1(p - 2j\Omega)\bar{\theta}(p - 2j\Omega) + \bar{\tau}_2(p - 2j\Omega)\theta(p) = \bar{S}_1(p - 2j\Omega)\bar{\omega}_{\zeta\zeta}(p - 2j\Omega) + \bar{S}_2(p - 2j\Omega)\omega_{\zeta\zeta}(p). \quad (8.36)$$

Выражая  $\bar{\theta}(p - 2j\Omega)$  из уравнения (8.36) и подставляя его в (8.31), получаем

$$\theta(p) = \frac{\bar{\tau}_1(p - 2j\Omega)\bar{S}_1(p) - \bar{\tau}_2(p)\bar{S}_2(p - 2j\Omega)}{\tau_1(p)\bar{\tau}_1(p - 2j\Omega) - \tau_2(p)\bar{\tau}_2(p - 2j\Omega)} \omega_{\zeta\xi}(p) + \frac{\bar{\tau}_1(p - 2j\Omega)S_2(p) - \tau_2(p)\bar{S}_1(p - 2j\Omega)}{\tau_1(p)\bar{\tau}_1(p - 2j\Omega) - \tau_2(p)\bar{\tau}_2(p - 2j\Omega)} \bar{\omega}_{\zeta\xi}(p - 2j\Omega), \quad (8.37)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}_1(p - 2j\Omega) &= \bar{\tau}_{1r}(p - 2j\Omega) + j\bar{\tau}_{1i}(p - 2j\Omega); \\ \bar{\tau}_2(p - 2j\Omega) &= \bar{\tau}_{2r}(p - 2j\Omega) + j\bar{\tau}_{2i}(p - 2j\Omega); \\ \bar{S}_1(p - 2j\Omega) &= \bar{S}_{1r}(p - 2j\Omega) + j\bar{S}_{1i}(p - 2j\Omega); \\ \bar{S}_2(p - 2j\Omega) &= \bar{S}_{2r}(p - 2j\Omega) + j\bar{S}_{2i}(p - 2j\Omega); \\ \bar{\tau}_{1r}(p - 2j\Omega) &= (2B + b)p^2 + 2k_0p + 2c_0 - (8B - 4A + 2b - a)\Omega^2; \\ \bar{\tau}_{1i}(p - 2j\Omega) &= -2(4B + b - A)\Omega p - 2k_0\Omega; \\ \bar{\tau}_{2r}(p - 2j\Omega) &= -bp^2 + (2b - a)\Omega^2; \\ \bar{\tau}_{2i}(p - 2j\Omega) &= 2b\Omega p; \\ \bar{S}_{1r}(p - 2j\Omega) &= -(2B + b)p; \\ \bar{S}_{1i}(p - 2j\Omega) &= (4B - 2A + 2b - a)\Omega; \\ \bar{S}_{2r}(p - 2j\Omega) &= bp; \\ \bar{S}_{2i}(p - 2j\Omega) &= -a\Omega. \end{aligned} \right\} \quad (8.38)$$

В равенстве (8.37) дробное выражение, стоящее сомножителем  $\omega_{\zeta\xi}(p)$ , будем называть комплексной прецессионной передаточной функцией гироскопа. Понятие "прецессионная передаточная функция" является достаточно условным из-за наличия в ней звеньев с нутационной частотой и употребляется здесь для различия слагаемых в правой части равенства (8.37). Второе дробное выражение, являющееся сомножителем  $\bar{\omega}_{\zeta\xi}(p - 2j\Omega)$ , назовем комплексной вибрационной передаточной функцией. Умножая числитель и знаменатель этих передаточных функций на функцию, комплексно-сопряженную знаменателю, получаем

$$\theta(p) = W(p)\omega_{\zeta\xi}(p) + W_{2\Omega}(p)\bar{\omega}_{\zeta\xi}(p - 2j\Omega),$$

где

$$\left. \begin{aligned} W(p) &= \frac{F(p) + jG(p)}{D(p)}; \\ W_{2\Omega}(p) &= \frac{F_{2\Omega}(p) + jG_{2\Omega}(p)}{D(p)}; \\ F(p) &= \sum_{i=0}^7 f_i p^{7-i}; \\ G(p) &= \sum_{i=0}^6 g_i p^{6-i}; \\ F_{2\Omega}(p) &= \sum_{i=0}^7 f_{2\Omega i} p^{7-i}; \\ G_{2\Omega}(p) &= \sum_{i=0}^6 g_{2\Omega i} p^{6-i}; \\ D(p) &= \sum_{i=0}^8 d_i p^{8-i}. \end{aligned} \right\} \quad (8.40)$$

Выражения для коэффициентов полиномов, стоящих в правых частях последних пяти равенств (8.40), получаются очень громоздкими, труднообозримыми и здесь не приводятся. Отметим еще, что второе слагаемое в выражение (8.39) почти во всем диапазоне частот намного меньше первого. По этой причине динамика ДНГ с одноколечным подвесом, у которого ротор намного инерционнее кольца, хорошо описывается прецессионной передаточной функцией, которую можно, используя соотношения (8.39), записать следующим образом:

$$W(p) = \frac{\theta(p)}{\omega_{\zeta\xi}(p)} = \frac{\beta(p) + j\alpha(p)}{\omega_{\zeta}(p) + j\omega_{\xi}(p)} = \frac{\beta(p)\omega_{\zeta}(p) + \alpha(p)\omega_{\xi}(p)}{\omega_{\zeta}^2(p) + j\omega_{\xi}^2(p)} + j \frac{\alpha(p)\omega_{\zeta}(p) - \beta(p)\omega_{\xi}(p)}{\omega_{\zeta}^2(p) + j\omega_{\xi}^2(p)}. \quad (8.41)$$

С учетом (8.41) можно найти собственные и перекрестные передаточные функции гироскопа:

$$W_{\alpha, \omega_{\xi}}(p) = \frac{\alpha(p)}{\omega_{\xi}(p)} = W_{\beta, \omega_{\zeta}}(p) = \frac{\beta(p)}{\omega_{\zeta}(p)} = \frac{\sum_{i=0}^7 f_i p^{7-i}}{\sum_{j=0}^8 d_j p^{8-i}}; \quad (8.42)$$

$$W_{\alpha, \omega_{\zeta}}(p) = \frac{\alpha(p)}{\omega_{\zeta}(p)} = -W_{\beta, \omega_{\xi}}(p) = -\frac{\beta(p)}{\omega_{\xi}(p)} = \frac{\sum_{i=0}^6 g_i p^{6-i}}{\sum_{j=0}^8 d_j p^{8-i}}, \quad (8.43)$$

причем (8.42) – **собственные передаточные функции**, а (8.43) – **перекрестные**.

Задача аналитического выделения типовых звеньев из полиномов, входящих в полученные выше выражения, является достаточно сложной по двум причинам: во-первых, как уже отмечалось, аналитическая зависимость коэффициентов полиномов от конструктивных параметров весьма громоздка, а во-вторых, степени полиномов не меньше 6. В связи с этим значения  $f_i$ ,  $g_i$ ,  $d_i$  и параметры передаточных функций удобнее рассчитывать на ЭВМ. Для настроенного гироскопа справедливы следующие соотношения:

$$W_{\alpha, \omega_{\xi}}(p) = -\frac{K_{11}(T_2 p + 1)(T_4^2 p^2 + 2T_4 \xi_4 p + 1)}{(T_1^2 p^2 + 2T_1 \xi_1 p + 1)(T_3^2 p^2 + 2T_3 \xi_3 p + 1)} \cdot \frac{(T_6^2 p^2 + 2T_6 \xi_6 p + 1)(T_8^2 p^2 + 2T_8 \xi_8 p + 1)}{(T_5^2 p^2 + 2T_5 \xi_5 p + 1)(T_7^2 p^2 + 2T_7 \xi_7 p + 1)}; \quad (8.44)$$

$$W_{\alpha, \omega_{\zeta}}(p) = \frac{K_{12}(T_9 p + 1)(1 - T_{10} p)}{(T_1^2 p^2 + 2T_1 \xi_1 p + 1)(T_3^2 p^2 + 2T_3 \xi_3 p + 1)} \cdot \frac{(T_{11}^2 p^2 - 2T_{11} \xi_{11} p + 1)(T_{12}^2 p^2 - 2T_{12} \xi_{12} p + 1)}{(T_5^2 p^2 + 2T_5 \xi_5 p + 1)(T_7^2 p^2 + 2T_7 \xi_7 p + 1)}. \quad (8.45)$$

Причем

$$\left. \begin{aligned} T_1 \approx T_2 \approx \frac{A + 2b}{k_0}, \\ \xi_1 \approx 1. \end{aligned} \right\} \quad (8.46)$$

Остальные параметры лучше находить с помощью ЭВМ. Укажем на некоторые полезные соотношения, справедливые при малом демпфировании и точной настройке, приводимые здесь без вывода.

$$\left.
\begin{aligned}
T_3 &= \frac{1}{\Omega - \omega_0}; \\
T_5 &= \frac{1}{\Omega + \omega_0}; \\
T_7 &= \frac{1}{2\Omega}; \\
\omega_0 &= \sqrt{\frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_0a_4}}{2a_0}}; \\
\xi_3^{\varepsilon} &= \frac{(a_3 - a_1\omega_0^2)T_3}{2a_0(\Omega^2 - \omega_0^2)}; \\
\xi_5^{\varepsilon} &= \frac{(a_3 - a_1\omega_0^2)T_5}{2a_0(\Omega^2 - \omega_0^2)}; \\
\xi_7^{\varepsilon} &= \frac{(a_1\Omega^2 - a_3)T_7}{2a_0(\Omega^2 - \omega_0^2)}; \\
a_0 &= B(B + b); \\
a_1 &= k_0(2B + b); \\
a_2 &= (2B + b)[(A - B)\Omega^2 + c_0] + B(a - b)\Omega^2 + (2B - A)^2\Omega^2; \\
a_3 &= k_0[(2A - 2B + a - b)\Omega^2 + 2c_0]; \\
a_4 &= [(A - B + a - b)\Omega^2 + c_0] \cdot [(A - B)\Omega^2 + c_0].
\end{aligned}
\right\} \quad (8.47)$$

### 8.3. Статические характеристики одноколечного ДНГ

Рассмотрим статические параметры передаточных функций (8.44) и (8.45), в качестве которых возьмем собственный коэффициент передачи  $K_{11}$  ДНГ и коэффициент перекрестной связи  $K_{12}$ . Из соотношений (8.42) и (8.43) получим при  $p \rightarrow 0$ :

$$K_{11} = -\frac{f_7}{d_8}; \quad (8.48)$$

$$K_{12} = -\frac{g_6}{d_8}. \quad (8.49)$$

где

$$\left.
\begin{aligned}
f_7 &= -S_{1i}\bar{\tau}_{1i}(\tau_{1r}\bar{\tau}_{1r} - \tau_{1i}\bar{\tau}_{1i} - \tau_{2r}\bar{\tau}_{2r}) + (S_{1i}\bar{\tau}_{1r} - \bar{S}_{2i}\tau_{2r})(\tau_{1r}\bar{\tau}_{1i} + \tau_{1i}\bar{\tau}_{1r}); \\
d_8 &= (\tau_{1r}\bar{\tau}_{1r} - \tau_{1i}\bar{\tau}_{1i} - \tau_{2r}\bar{\tau}_{2r})^2 + (\tau_{1r}\bar{\tau}_{1i} + \tau_{1i}\bar{\tau}_{1r})^2; \\
g_6 &= (S_{1i}\bar{\tau}_{1r} - \bar{S}_{2i}\tau_{2r})(\tau_{1r}\bar{\tau}_{1r} - \tau_{1i}\bar{\tau}_{1i} - \tau_{2r}\bar{\tau}_{2r}) + S_{1i}\bar{\tau}_{1i}(\tau_{1r}\bar{\tau}_{1i} + \tau_{1i}\bar{\tau}_{1r}).
\end{aligned}
\right\} \quad (8.50)$$

Здесь соответствующие полиномы от аргумента  $p$  находятся из соотношений (8.22) и (8.38) при  $p = 0$ .

В результате подстановки получаем:

$$\left. \begin{aligned} f_7 &= 4k_o \Omega^2 \{2(2A+a)\varepsilon_0 - [2c_0 - (4B-2A+2b-a)\Omega^2] \cdot \\ &\cdot [(2A+a)[2c_0 - (8B-4A+2b-a)\Omega^2] + a\Omega^2(2b-a)\}; \\ d_8 &= 16\varepsilon_0^2 + 16k_o^2 \Omega^2 [2c_0 - (4B-2A+2b-a)\Omega^2]^2; \\ g_6 &= 4\varepsilon_0 \{(2A+a)\Omega[2c_0 - (8B-4A+2b-a)\Omega^2] + (2b-a)\Omega^3 a\}, \end{aligned} \right\} \quad (8.51)$$

где

$$\varepsilon_0 = (2B-A)(2b-a)\Omega^4 - (4B-2A+2b-a)\Omega^2 c_0 + c_0^2 - k_o^2 \Omega^2.$$

Тогда с учетом полученных соотношений максимум коэффициента  $K_{11}$  достигается для  $\varepsilon_0 = 0$ , при этом  $K_{12} = 0$ . Можно показать, что и постоянная времени ДНГ  $T_1$  достигает своего максимума. Таким образом, равенство

$$(2B-A)(2b-a)\Omega^4 - (4B-2A+2b-a)\Omega^2 c_0 + c_0^2 - k_o^2 \Omega^2 = 0 \quad (8.52)$$

является полным условием динамической настройки. В том случае, когда оно выполнено, в установившемся режиме перекрестные связи отсутствуют, и это является критерием настройки ДНГ. Разрешим уравнение (8.52) относительно  $c_0$ , пренебрегая членом  $k_o^2 \Omega^2$ :

$$c_0 = \frac{4B-2A+2b-a \pm \sqrt{4(2B-A)^2 + (2b-a)^2}}{2} \Omega^2. \quad (8.53)$$

Из полученного равенства видно, что существует два таких значения угловой жесткости упругих элементов, которые удовлетворяют условию динамической настройки. При реализации большего значения жесткости коэффициент передачи  $K_{11}$  меньше, а величина вибрационной составляющей в выходном сигнале гироскопа больше, чем при его настройке на меньшую жесткость. По этой причине на практике обычно пользуются условием

$$c_0 = \frac{4B-2A+2b-a - \sqrt{4(2B-A)^2 + (2b-a)^2}}{2} \Omega^2. \quad (8.54)$$

Отметим, что геометрия расположения масс ротора и кольца такова, что  $\frac{A}{2} < B < A$ ;  $\frac{a}{2} < b < a$ , поэтому  $2B-A > 0$  и  $2b-a > 0$ . Предположим теперь, что  $2B-A \gg 2b-a$ , тогда вторым слагаемым, стоящим под радикалом в выражении (8.54), можно пренебречь:

$$c_0 = \frac{(2b-a)\Omega^2}{2}. \quad (8.55)$$

При возникновении расстройки (например, за счет изменения угловой жесткости упругих элементов) коэффициенты передачи (8.48) и (8.49) изменяются. Используя формулы (8.51), можно получить их зависимости от изменения жесткости вблизи значения, вычисляемого по формуле (8.54). Соответствующие им графики показаны на рисунке 8.5, где  $K_{11}(0)$  и  $c_0(0)$  – собственный коэффициент передачи гироскопа и угловая жесткость упругих элементов, вычисленные для точно настроенного гироскопа, т.е. при  $\varepsilon_0 = 0$ . По



оси абсцисс отложены отношения собственного и перекрестного коэффициента передачи к собственному коэффициенту настроенного ДНГ, а по оси ординат – отношение остаточной угловой жесткости подвеса к угловой жесткости упругих элементов настроенного ДНГ.

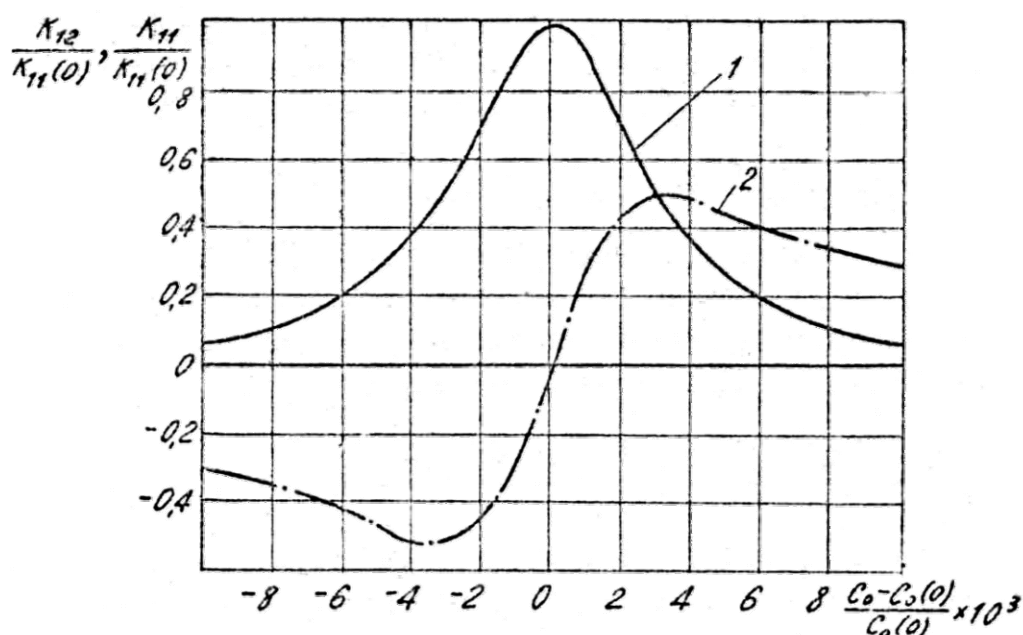


Рис. 8.5. Зависимости относительных коэффициентов передачи от относительной остаточной жесткости:

1 – для собственного канала; 2 – для перекрестного канала

Представленные зависимости раскрывают существенное влияние расстройки на свойства гироскопа. С увеличением остаточной жесткости подвеса уменьшается угол реакции ДНГ на постоянное угловое движение основания по собственному каналу и возникает, а затем увеличивается угол отклонения ротора по оси, перпендикулярной вектору угловой скорости разворота основания. Увеличение отрицательных значений остаточной жесткости ведет к уменьшению угла отклонения ротора относительно оси, совпадающей с вектором этой угловой скорости, и к увеличению угла отклонения (но в противоположную сторону) относительно оси, перпендикулярной указанному вектору.

Из рисунка 8.5 видно, что при такой расстройке, когда коэффициент передачи собственного канала уменьшается на 30%, коэффициент передачи перекрестного канала возрастает до величины, составляющей 63% от первого. Это означает, что влияние расстройки оказывается на перекрестных связях гораздо сильнее, чем на собственном канале. Именно оно и определяет жесткие требования к точности выполнения и стабильности конструктивных параметров, входящих в условие динамической настройки. Для удовлетворительной работы ДНГ в качестве датчика информации об угловых отклонениях основания необходимо, чтобы уровень перекрестных связей был на 2...3 порядка меньше уровня выходного сигнала собственного канала. При этом относительная нестабильность угловой скорости вращения приводного вала обычно должна быть не более 0,01%.

#### 8.4. Погрешности гироскопа Хоува от внешних гармонических воздействий с частотой, равной удвоенной частоте вращения вала

Конструкция одноколечного динамически настраиваемого гироскопа такова, что любое внешнее воздействие, приложенное в системе координат, связанной с основанием прибора, проектируясь на оси, связанные с вращающимся валом, модулируется по амплитуде, причем несущая частота его равна частоте вращения приводного вала гироскопа. Тогда реакция ротора на постоянное относительно системы координат, связанной с основанием, воздействие, будет гармонической, с частотой, равной частоте вращения вала. Однако съём сигнала, как правило осуществляется в связанной с основанием системе координат, относительно которой движение ротора будет складываться из прецессионной и вибрационной составляющих – см. выражение (8.39) – причем амплитуда последней пропорциональна величине входного воздействия, а частота равна удвоенной частоте вращения вала. Именно эта составляющая и определяет характерную для рассматриваемого класса гироскопов погрешность, возникающую вследствие вибрации основания на удвоенной частоте вращения вала.

Рассмотрим сущность этой погрешности. Для этого представим вибрационную составляющую выходного сигнала ДНГ в виде произведения амплитуды  $x(t)$  на гармоническую функцию:

$$y(t) = x(t) \cos 2\Omega t.$$

Если входное воздействие является постоянным, то выходной сигнал гироскопа является гармоническим, частота которого равна удвоенной частоте вращения вала, т.к.  $x(t) = const$ . В случае же гармонического воздействия с частотой  $2\Omega$   $x(t) = x_0(t) \cos(2\Omega t + \gamma)$ , при этом выходная переменная

$$y(t) = x_0 \cos(2\Omega t + \gamma) \cos 2\Omega t = \frac{x_0}{2} [\cos \gamma + \cos(4\Omega t + \gamma)],$$

т.е. она складывается из постоянной составляющей, являющейся погрешностью ДНГ, и гармонической с частотой  $4\Omega$ . Учитывая это обстоятельство, будем далее рассматривать реакцию гироскопа на угловую вибрацию с частотой  $2\Omega$ . Предположим, что основание совершает угловые отклонения  $\Phi_\xi$  и  $\Phi_\zeta$  относительно соответствующих осей с амплитудами  $\Phi_{\xi 0}$  и  $\Phi_{\zeta 0}$  и частотой  $2\Omega$ :

$$\Phi_\xi = \Phi_{\xi 0} \sin(2\Omega t + \gamma); \quad (8.56)$$

$$\Phi_\zeta = \Phi_{\zeta 0} \sin(2\Omega t + \gamma), \quad (8.57)$$

где  $\gamma$  – постоянный фазовый сдвиг. Из (8.56) и (8.57) нетрудно найти соответствующие угловые скорости:

$$\omega_\xi(t) = 2\Phi_{\xi 0} \Omega \cos(2\Omega t + \gamma); \quad (8.58)$$

$$\omega_\zeta(t) = 2\Phi_{\zeta 0} \Omega \cos(2\Omega t + \gamma). \quad (8.59)$$

Умножая равенство (7.58) на  $j$  и складывая его с (7.59), получаем

$$\omega_{\zeta\xi}(t) = 2\Phi_{\zeta\xi 0} \Omega \cos(2\Omega t + \gamma) = 2\Phi_{\zeta\xi 0} \Omega (\cos 2\Omega t \cos \gamma - \sin 2\Omega t \sin \gamma),$$

где  $\Phi_{\zeta\xi 0} = \Phi_{\zeta 0} + j\Phi_{\xi 0}$ .

Соотношение (7.60) запишем в области изображений:

$$\omega_{\zeta\zeta}(p) = 2\Phi_{\zeta\zeta 0}\Omega \frac{\cos\gamma \cdot p - 2\Omega \sin\gamma}{p^2 + 4\Omega^2}. \quad (8.61)$$

Найдем также  $\bar{\omega}_{\zeta\zeta}(p - 2j\Omega)$ :

$$\bar{\omega}_{\zeta\zeta}(p - 2j\Omega) = 2\bar{\Phi}_{\zeta\zeta 0}\Omega \frac{\cos\gamma \cdot p - 2\Omega \sin\gamma - 2j\Omega \cos\gamma}{p(p - 4j\Omega)}. \quad (8.62)$$

Обратимся теперь к равенству (7.37), введя следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} H(p) &= \bar{\tau}_1(p - 2j\Omega)S_1(p) - \tau_2(p)\bar{S}_2(p - 2j\Omega) = h_0p^3 + h_1p^2 + \dots + h_3; \\ Q(p) &= \tau_1(p)\bar{\tau}_1(p - 2j\Omega) - \tau_2(p)\bar{\tau}_2(p - 2j\Omega) = q_0p^4 + q_1p^3 + \dots + q_4; \\ R(p) &= \bar{\tau}_1(p - 2j\Omega)S_2(p) - \tau_2(p)\bar{S}_1(p - 2j\Omega) = r_0p^3 + r_1p^2 + \dots + r_3, \end{aligned} \right\} \quad (8.63)$$

где  $h_0, \dots, h_3, q_0, \dots, q_4, r_0, \dots, r_3$  – комплексные коэффициенты которые можно найти, подставив (8.22) и (8.38) в (8.37). С учетом соотношений (8.61)...(8.63) равенство (8.37) можно переписать в виде

$$\theta(p) = \frac{H(p)}{Q(p)} 2\Omega\Phi_{\zeta\zeta 0} \frac{\cos\gamma \cdot p - 2\Omega \sin\gamma}{p^2 + 4\Omega^2} + \frac{R(p)}{Q(p)} 2\Omega\bar{\Phi}_{\zeta\zeta 0} \frac{\cos\gamma \cdot p - 2\Omega \sin\gamma - 2j\Omega \cos\gamma}{p(p - 4j\Omega)}. \quad (8.64)$$

Используя теорему о предельном переходе, найдем установившееся значение угла  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_{2\Omega}(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pH(p)}{Q(p)} 2\Omega\Phi_{\zeta\zeta 0} \frac{\cos\gamma \cdot p - 2\Omega \sin\gamma}{p^2 + 4\Omega^2} + \\ &+ \lim_{p \rightarrow 0} \frac{R(p)}{Q(p)} 2\Omega\bar{\Phi}_{\zeta\zeta 0} \frac{\cos\gamma \cdot p - 2\Omega \sin\gamma - 2j\Omega \cos\gamma}{p(p - 4j\Omega)} = \\ &= \frac{r_3}{q_4} \Omega \bar{\Phi}_{\zeta\zeta 0} (\cos\gamma - j \sin\gamma) = \\ &= \frac{k_o(2b - a)\Omega^2 + j(2b - a)\Omega[c_o - (2B - A)\Omega^2]}{-2\varepsilon_o + 2j\Omega k_o[2c_o - (4B - 2A + 2b - a)\Omega^2]} \Omega (\cos\gamma - j \sin\gamma) \bar{\Phi}_{\zeta\zeta 0} \end{aligned} \quad (8.65)$$

Считая гироскоп точно настроенным  $\varepsilon_o = 0$  и предполагая, что демпфирование мало, т.е.  $[c_o - (2B - A)\Omega^2] \gg k_o\Omega$ , запишем последнее равенство в координатной форме:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{2\Omega} &= -\frac{(2b - a)\Omega[c_o - (2B - A)\Omega^2]}{2k_o[2c_o - (4B - 2A + 2b - a)\Omega^2]} (\Phi_{\xi_0} \sin\gamma + \Phi_{\xi_0} \cos\gamma); \\ \beta_{2\Omega} &= -\frac{(2b - a)\Omega[c_o - (2B - A)\Omega^2]}{2k_o[2c_o - (4B - 2A + 2b - a)\Omega^2]} (\Phi_{\zeta_0} \sin\gamma + \Phi_{\zeta_0} \cos\gamma); \end{aligned} \right\} \quad (8.66)$$

Углы  $\alpha_{2\Omega}$  и  $\beta_{2\Omega}$  являются погрешностями рассматриваемого типа ДНГ от угловой вибрации основания с частотой, равной удвоенной частоте вращения приводного вала. Чаще, однако, пользуются выражением для угловой скорости дрейфа гироскопа от рассматриваемого углового движения. Указанная скорость

появляется в начальный момент действия вибрации и с течением времени уменьшается до нуля по экспоненциальному закону до установления углов отклонения ротора, определяемых из (8.66). Время, в течение которого происходит нарастание углов  $\alpha$  и  $\beta$ , примерно равно  $3T_1$  и составляет обычно от нескольких секунд до нескольких минут, что определяется коэффициентом демпфирования  $k_\delta$ . Если же  $k_\delta \rightarrow 0$ , то  $T_1 \rightarrow \infty$  согласно (8.31), и скорость дрейфа в этом гипотетическом случае является постоянной, равной своему значению в начальный момент времени. Таким образом, искомый дрейф находится для недемпфированного гироскопа, т.е. при  $k_\delta = 0$ . При этом для настроенного гироскопа  $q_4 = 0$  и в знаменателе выделяется свободный множитель  $p$ . Умножая правую и левую части равенства (8.64) на  $p$  и совершая предельный переход, получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta}_{2\Omega}(t) = \frac{r_3}{q_3} \Omega \bar{\Phi}_{\zeta \xi 0} (\cos \gamma - j \sin \gamma) \Big|_{k\delta=0} = \frac{(2b-a)\Omega [c_0 - (2B-A)\Omega^2] \cdot (\cos \gamma - j \sin \gamma) \bar{\Phi}_{\zeta \xi 0}}{[2c_0 - (2b-a)\Omega^2] \cdot (4B+b-A) + [2c_0 - (8B-4A+2b-a)\Omega^2] \cdot (A+b) + 4b(2b-a)\Omega^2} \quad (8.67)$$

Соотношение (8.67) можно записать в координатной форме:

$$\alpha_{2\Omega} = - \frac{(2b-a)\Omega [c_0 - (2B-A)\Omega^2] \cdot (\Phi_{\zeta 0} \sin \gamma - \Phi_{\xi 0} \cos \gamma)}{[2c_0 - (2b-a)\Omega^2] \cdot (4B+b-A) + [2c_0 - (8B-4A+2b-a)\Omega^2] \cdot (A+b) + 4b(2b-a)\Omega^2}; \quad (8.68)$$

$$\beta_{2\Omega} = - \frac{(2b-a)\Omega [c_0 - (2B-A)\Omega^2] \cdot (\Phi_{\zeta 0} \cos \gamma - \Phi_{\xi 0} \sin \gamma)}{[2c_0 - (2b-a)\Omega^2] \cdot (4B+b-A) + [2c_0 - (8B-4A+2b-a)\Omega^2] \cdot (A+b) + 4b(2b-a)\Omega^2}.$$

Анализ формул (8.66) и (8.68) показывает, что динамически настраиваемый гироскоп с одноколечным подвесом весьма чувствителен к угловым вибрациям основания удвоенной частотой вращения вала. Так, например, если ее амплитуда близка к 10 угловым секундам, скорость дрейфа обычно составляет несколько десятков градусов в час. Для снижения этой чувствительности необходимо уменьшать угловую скорость вращения вала, разность моментов инерции кольца  $2b-a$  и увеличивать моменты инерции ротора. Этому, однако, противоречат другие требования, предъявляемые к ДНГ. Так, увеличение моментов инерции ротора приводит к увеличению массы и габаритов прибора, уменьшение разности  $2b-a$  и угловой скорости  $\Omega$  – к снижению жесткости упругих элементов, удовлетворяющих условию динамической настройки (8.54). Последнее, в свою очередь, обуславливает снижение линейной жесткости подвеса, что увеличивает погрешности гироскопа от действия ускорений.

Рассмотрим теперь погрешности, возникающие вследствие воздействия внешних гармонических моментов с частотой, равной удвоенной частоте вращения вала. С этой целью в правую часть уравнения (8.21) вместо инерционных и гироскопических моментов, возникающих от переносного углового движения основания, запишем внешний момент  $M_{\zeta \xi}(p)$  с учетом того

факта, что при выводе уравнения (8.19) правая и левая части исходного уравнения были умножены на два:

$$\tau_1(p)\theta(p) + \tau_2(p)\bar{\theta}(p - 2j\Omega) = 2M_{\zeta\zeta}(p), \quad (8.69)$$

где

$$M_{\zeta\zeta}(p) = M_{\zeta}(p) + jM_{\xi}(p).$$

Продельвая уже описанные преобразования над комплексными функциями, получаем выражение, подобное (8.37), но относительно внешних моментов:

$$\begin{aligned} \theta(p) = & \frac{2\bar{\tau}_1(p - 2j\Omega)}{\tau_1(p)\bar{\tau}_1(p - 2j\Omega) - \tau_2(p)\bar{\tau}_2(p - 2j\Omega)} M_{\zeta\zeta}(p) - \\ & - \frac{2\tau_2(p)}{\tau_1(p)\bar{\tau}_1(p - 2j\Omega) - \tau_2(p)\bar{\tau}_2(p - 2j\Omega)} \bar{M}_{\zeta\zeta}(p - 2j\Omega). \end{aligned} \quad (8.70)$$

Полагая, что

$$M_{\xi} = M_{\xi_0} \sin(2\Omega t + \gamma);$$

$$M_{\zeta} = M_{\zeta_0} \sin(2\Omega t + \gamma),$$

найдем необходимые изображения:

$$\left. \begin{aligned} M_{\zeta\zeta}(p) &= M_{\zeta\zeta_0} \frac{\sin \gamma \cdot p + 2\Omega \cos \gamma}{p^2 + 4\Omega^2}; \\ \bar{M}_{\zeta\zeta}(p - 2j\Omega) &= \bar{M}_{\zeta\zeta_0} \frac{\sin \gamma \cdot p + 2\Omega(\cos \gamma - j \sin \gamma)}{p(p - 4j\Omega)}, \end{aligned} \right\} \quad (8.71)$$

где  $M_{\zeta\zeta_0} = M_{\zeta_0} + jM_{\xi_0}$ .

Подставляя (8.71) в (8.70), получаем установившееся значение угловой скорости дрейфа для недемпфированного гироскопа:

$$\dot{\theta}(p) = \frac{(2b - a)\Omega \bar{M}_{\zeta\zeta_0} (\cos \gamma - j \sin \gamma)}{2 \left\{ [2c_0 - (2b - a)\Omega^2] \cdot (4B + b - A) + [2c_0 - (8B - 4A + 2b - a)\Omega^2] \cdot (A + b) + 4b(2b - a)\Omega^2 \right\}} \quad (8.72)$$

откуда нетрудно по аналогии с предыдущим найти дрейф ДНГ в координатной форме. Анализируя выражение (8.72), можно заметить, что для снижения влияния моментов на удвоенной частоте вращения вала необходимо уменьшать разность моментов инерции кольца  $2b - a$  по сравнению с моментами инерции ротора.

Погрешности одноколечного динамически настраиваемого гироскопа от влияния внешних гармонических воздействий с частотой, равной удвоенной частоте вращения вала, являются характерными для рассмотренного типа приборов и путем подбора параметров не устраняются, а только могут уменьшаться до определенного предела, обусловленного, как уже было отмечено, техническими требованиями, наложенными на гироскоп. Эта погрешность является весьма существенным недостатком, сужающим область применения одноколечного ДНГ. Для его устранения были предложены конструкции гироскопов с многоколечными, и в частности, с двухколечным подвесом.

### 8.5. Уравнения движения динамически настраиваемого гироскопа с двухколечным подвесом

Кинематическая схема динамически настраиваемого гироскопа с двухколечным подвесом показана на рисунке 7.2, в). Будем считать, что рассматриваемый ДНГ удовлетворяет всем семи условиям, приведенным в начале главы. Для описания положения вала, кольца и ротора относительно основания гироскопа, а так же их взаимного расположения введены в рассмотрение системы координат (рис. 8.6):  $\xi\eta\zeta$  – система координат, связанная с основанием (корпусом),  $x_\theta y_\theta z_\theta$  – система координат, связанная с приводным валом,  $x_1 y_1 z_1$  – система координат, связанная с первым карданным кольцом,  $x_2 y_2 z_2$  – система координат, связанная со вторым карданным кольцом. Положение системы координат, связанной с ротором, зависит от последовательности поворотов элементов подвеса. Этот вопрос будет рассмотрен ниже.

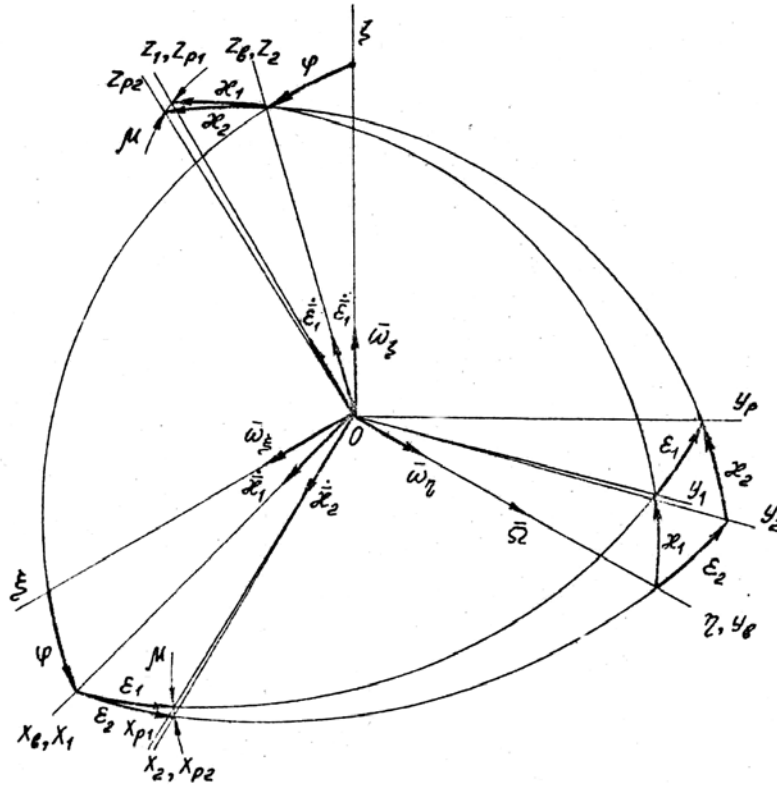


Рис. 8.6. Системы координат для вывода уравнений движения ДНГ с двухколечным подвесом

Пусть основание совершает угловое движение, проекции угловой скорости которого на оси  $\xi\eta\zeta$  равны соответственно  $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ . Поворот системы координат  $x_\theta y_\theta z_\theta$ , связанной с валом, определяется углом  $\varphi$ , а угловая скорость этого вращения равна  $\Omega$ . Заметим теперь, что в данной конструкции ДНГ невозможно найти такие угловые перемещения относительно осей упругих элементов, которые бы не влияли на положение остальных элементов гироскопа. Следовательно, имеется две последовательности поворотов, приводящих ось  $y_p$  ротора в определенное положение. Для реализации первой последовательности

предположим, что кинематическая связь со вторым кольцом отсутствует. Угол отклонения первого кольца и ротора относительно оси упругих элементов, связанных с валом, обозначим через  $\chi_1$  (первый поворот), угловая скорость такого поворота равна  $\dot{\chi}_1$ , угол отклонения ротора относительно оси упругих элементов, связанных с кольцом, обозначим через  $\varepsilon_1$  (второй поворот), а угловая скорость этого поворота равна  $\dot{\varepsilon}_1$ .

Вторая последовательность поворотов реализуется в предположении отсутствия кинематической связи ротора с первым кольцом. В этом случае первый поворот первого кольца с ротором относительно оси упругих элементов, связанных с валом, производится на угол  $\varepsilon_2$  с угловой скоростью  $\dot{\varepsilon}_2$ , а второй поворот осуществляется только ротором на угол  $\chi_2$  относительно оси упругих элементов, связанных с первым кольцом, с угловой скоростью  $\dot{\chi}_2$ . Если в первом случае ротор занимает положение, определяемое системой координат  $x_{p1}, y_{p1}, z_{p1}$ , то во втором – системой координат  $x_{p2}, y_{p2}, z_{p2}$ .

Это говорит о том, что абсолютно жесткие относительно нерабочих осей упругие элементы делают такой ДНГ принципиально неработоспособным, препятствуя любому угловому смещению ротора относительно вала, т.к. он, являясь твердым телом, не может одновременно занимать два различных положения. Таким образом в реальных конструкциях гироскопов с двухколечным подвесом обязательно присутствует изгиб упругих элементов относительно оси  $y_p$ , обеспечивающей возможность угловых отклонений ротора. Обозначим угол смещения системы координат  $x_{p1}, y_{p1}, z_{p1}$  относительно  $x_{p2}, y_{p2}, z_{p2}$  через  $\mu$ . Предположим, что реализована первая последовательность поворотов  $\chi_1, \varepsilon_1$ . Тогда углы  $\chi_2$  и  $\varepsilon_2$  являются зависимыми от  $\chi_1$  и  $\varepsilon_1$ , и их можно найти при помощи формул сферической тригонометрии [8]:

$$\left. \begin{aligned} \sin \chi_2 &= \cos \varepsilon_1 \sin \chi_1, \\ \sin \varepsilon_2 &= \frac{\sin \varepsilon_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \chi_2}}, \end{aligned} \right\} \quad (8.73)$$

а угол  $\mu$  – по формуле

$$\cos \mu = \cos \chi_1 \cos \chi_2 + \sin \chi_1 \sin \chi_2 \cos \varepsilon_2 = \cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2 + \sin \varepsilon_1 \sin \varepsilon_2 \cos \chi_1. \quad (8.74)$$

Для приближенной оценки значения угла  $\mu$  используем разложения тригонометрических функций в ряд Маклорена, удерживая в нем члены до второго порядка малости. Так как углы отклонения ротора относительно вала ДНГ весьма малы, то погрешность такого представления также мала. Имеем

$$\sin x = x;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2},$$

где  $x$  – любой из углов  $\mu, \chi_i$  и  $\varepsilon_i$ .

С учетом последних соотношений можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \chi_2 &= \chi_1 - \frac{\chi_1 \varepsilon_1^2}{2}, \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 \chi_1^2}{2}, \\ \mu^2 &= \chi_1^2 + \chi_2^2 - 2\chi_1 \chi_2 \left(1 - \frac{\varepsilon_2^2}{2}\right) = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \left(1 - \frac{\chi_1^2}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (8.75)$$

Подставляя первые два уравнения системы (7.75) в последнее получаем

$$\mu = \chi_1 \varepsilon_1. \quad (8.76)$$

Нетрудно заметить, что если упругие элементы совершенно одинаковы, то относительное угловое смещение колец подвеса составляет  $\frac{\mu}{2}$ . Приведем

числовой пример. Пусть максимальные углы отклонения  $\chi_{1m} = \varepsilon_{1m} = 20'$ . Тогда по формуле (8.76) получаем  $\mu = 7''$ . Предположим теперь, что расстояние  $l$  между точкой крепления упругого элемента к кольцу и осью вращения вала равна 15 мм, тогда смещение этой точки относительно номинального положения составляет

$\Delta x = l \frac{\mu}{2} = 0,25 \text{ мкм}$ . Несмотря на то, что возникшие при работе ДНГ деформации

упругих элементов относительно нерабочих осей являются достаточно малыми, указанный эффект приводит к изменению жесткости упругих элементов относительно рабочих осей. Однако на практике, когда гироскоп работает, например, в качестве чувствительного элемента индикаторного гиросtabilизатора, углы отклонения ротора обычно не превышают 1...2 угловых минут. В этом случае изменением жесткости упругих элементов можно пренебречь. Будем также пренебрегать углом  $\mu$ , считая что  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ,  $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ . При этих допущениях проекции угловых скоростей движения элементов гироскопа на связанные с ним оси будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{1x1} &= \dot{\chi} + \omega_\xi \cos \varphi - \omega_\zeta \sin \varphi, \\ \omega_{1y1} &= (\Omega + \omega_\eta) \cos \chi + \omega_\zeta \sin \chi \cos \varphi + \omega_\xi \sin \chi \sin \varphi, \\ \omega_{1z1} &= \omega_\zeta \cos \chi \cos \varphi + \omega_\xi \cos \chi \sin \varphi - (\Omega + \omega_\eta) \sin \chi, \end{aligned} \right\} \quad (8.77)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{2x2} &= \omega_\xi \cos \varepsilon \cos \varphi - \omega_\zeta \cos \varepsilon \cos \varphi + (\Omega + \omega_\eta) \sin \varepsilon, \\ \omega_{2y2} &= (\Omega + \omega_\eta) \cos \varepsilon - \omega_\xi \sin \varepsilon \cos \varphi + \omega_\zeta \sin \varepsilon \sin \varphi, \\ \omega_{2z2} &= \dot{\varepsilon} + \omega_\xi \sin \varphi - \omega_\zeta \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (8.78)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{pxp} &= (\omega_\xi \cos \varphi - \omega_\zeta \sin \varphi + \dot{\chi}) \cos \varepsilon + [(\Omega + \omega_\eta) \cos \chi + (\omega_\zeta \cos \varphi + \omega_\xi \sin \varphi) \sin \chi] \sin \varepsilon, \\ \omega_{pyy} &= [(\Omega + \omega_\eta) \cos \chi + (\omega_\zeta \cos \varphi + \omega_\xi \sin \varphi) \sin \chi] \cos \varepsilon - (\omega_\xi \cos \varphi - \omega_\zeta \sin \varphi + \dot{\chi}) \sin \varepsilon, \\ \omega_{pzp} &= (\omega_\zeta \cos \varphi + \omega_\xi \sin \varphi) \cos \chi - (\Omega + \omega_\eta) \sin \chi + \dot{\varepsilon}, \end{aligned} \right\} \quad (8.79)$$

где  $\omega_{ixi}$ ,  $\omega_{iyi}$ ,  $\omega_{izi}$  – проекции угловой скорости  $i$ -го кольца на соответствующие оси.



Динамические уравнения для ротора в связанной с ним системе координат имеют ту же форму, что и для гироскопа с одноколечным подвесом – см. систему (8.1). Уравнение для первого кольца по аналогу с (8.2) можно записать в виде

$$b_1 \dot{\omega}_{1x1} + (c_1 - a_1) \omega_{1y1} \omega_{1z1} = M_{кx1} + M_{кyx1}, \quad (8.80)$$

а для второго

$$b_2 \dot{\omega}_{2z2} + (a_2 - c_2) \omega_{2y2} \omega_{2x2} = M_{кz2} + M_{кyz2}, \quad (8.81)$$

где  $M_{кx1}$ ,  $M_{кyx1}$ ,  $M_{кz2}$ ,  $M_{кyz2}$  – проекции моментов реакций связей действующих на первое и второе кольцо, со стороны ротора и упругого элемента. Методика дальнейших преобразований принципиально не отличается от случая одноколечного гироскопа; необходимо лишь учитывать, что реакция связей, наложенных на ротор, складывается из моментов, действующих со стороны двух колец и двух пар упругих элементов. Опуская все промежуточные выкладки, запишем линеаризованные уравнения движения ДНГ с двухколечным подвесом:

$$\begin{aligned} (B + b_1) \ddot{\chi} + (2B - A) \Omega \dot{\varepsilon} + (k_{11} + k_{22}) \dot{\chi} + [(A - B + a_1 - c_1) \Omega^2 + c_{11} + c_{22}] \chi = \\ = (A + a_1 + b_1 - c_1) \Omega (\omega_\zeta \cos \Omega t + \omega_\xi \sin \Omega t) + (B + b_1) (\dot{\omega}_\xi \sin \Omega t - \dot{\omega}_\zeta \cos \Omega t), \\ (B + b_2) \ddot{\varepsilon} - (2B - A) \Omega \dot{\chi} + (k_{12} + k_{21}) \dot{\varepsilon} + [(A - B + a_2 - c_2) \Omega^2 + c_{12} + c_{21}] \varepsilon = \\ = -(B + b_2) (\dot{\omega}_\zeta \cos \Omega t + \dot{\omega}_\xi \sin \Omega t) - (A + a_2 + b_2 - c_2) \Omega (\omega_\xi \cos \Omega t - \omega_\zeta \sin \Omega t), \end{aligned} \quad (8.82)$$

где  $c_{i1}$ ,  $c_{i2}$  – коэффициенты угловой жесткости упругих элементов, соединяющих  $i$ -е кольцо с валом и ротором соответственно;  $k_{i1}$ ,  $k_{i2}$  – коэффициенты вязкого трения в материале соответствующих упругих элементов.

Предположим, что подвес гироскопа симметричен:

$$a_1 = a_2 = a; \quad b_1 = b_2 = b, \quad c_1 = c_2 = c; \quad k_{11} = k_{12} = k_{21} = k_{22} = \frac{k_o}{2}; \quad c_{11} = c_{12} = c_{21} = c_{22} = \frac{k_n}{2},$$

где  $k_o$  – приведенный коэффициент демпфирования,  $k_n$  – приведенная угловая жесткость подвеса.

С учетом этих условий уравнение движения ротора ДНГ относительно системы координат  $\xi \eta \zeta$ , связанной с основанием гироскопа, в комплексной форме будет иметь вид

$$\begin{aligned} (B + b_1) \ddot{\theta} - j \Omega (A + 2b) \dot{\theta} + k_o \dot{\theta} + [k_n - (b + c - a) \Omega^2] \theta - j k_o \Omega \theta = \\ = j (A + a + b - c) \Omega \omega_{\zeta\xi} - (B + b) \dot{\omega}_{\zeta\xi}. \end{aligned} \quad (8.83)$$

Уравнение (7.83) эквивалентно двум в координатной форме:

$$\left. \begin{aligned} (B + b_1) \ddot{\alpha} - \Omega (A + 2b) \dot{\beta} + k_o \dot{\alpha} + \varepsilon_0 \alpha - k_o \Omega \beta = (A + a + b - c) \Omega \omega_\zeta - (B + b) \dot{\omega}_\xi, \\ (B + b_1) \ddot{\beta} + \Omega (A + 2b) \dot{\alpha} + k_o \dot{\beta} + \varepsilon_0 \beta + k_o \Omega \alpha = -(A + a + b - c) \Omega \omega_\xi - (B + b) \dot{\omega}_\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (8.84)$$

где  $\varepsilon_0 = k_n - (b + c - a) \Omega^2$ .

Сравнивая уравнения (8.83) и (8.19), видим, что в отличие от гироскопа с одноколечным подвесом отсутствуют вибрационные члены как в левой, так и в правой частях. Таким образом, ДНГ рассматриваемой конструкции является **прецессионным**.

## 8.6. Передаточные функции двухколенного ДНГ

Передаточные функции ДНГ с двухколенным подвесом можно найти двумя способами: во-первых, используя уравнение (8.83), получить комплексную передаточную функцию; во-вторых, вывести передаточные функции сразу в координатной форме из системы уравнений (8.84). Воспользуемся вторым вариантом получения искомых функций. Система уравнений (8.84), записанная в области изображений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} [(B+b)p^2 + k_0 p + \varepsilon_0] \alpha(p) - [(A+2b)\Omega p + k_0 \Omega] \beta(p) &= \\ = (A+a+b-c)\Omega \omega_\zeta(p) - (B+b)p \omega_\xi(p), \\ [(A+2b)\Omega p + k_0 \Omega] \alpha(p) [(B+b)p^2 + k_0 p + \varepsilon_0] \beta(p) &= \\ = -(A+a+b-c)\Omega \omega_\xi(p) - (B+b)p \omega_\zeta(p). \end{aligned} \right\} \quad (8.85)$$

Решив систему (8.85) относительно выходных переменных  $\beta(p)$  и  $\alpha(p)$ , получим:

$$W_{\alpha, \omega_\xi}(p) = \frac{\alpha(p)}{\omega_\xi(p)} = \frac{\sum_{i=0}^3 f_i p^{3-i}}{\sum_{j=0}^4 d_j p^{4-i}}; \quad (8.86)$$

$$W_{\beta, \omega_\zeta}(p) = \frac{\beta(p)}{\omega_\zeta(p)} = W_{\alpha, \omega_\xi}(p); \quad (8.87)$$

$$W_{\alpha, \omega_\zeta}(p) = \frac{\alpha(p)}{\omega_\zeta(p)} = \frac{\sum_{i=0}^2 g_i p^{2-i}}{\sum_{j=0}^4 d_j p^{4-i}}; \quad (8.88)$$

$$W_{\beta, \omega_\xi}(p) = \frac{\beta(p)}{\omega_\xi(p)} = -W_{\alpha, \omega_\xi}(p), \quad (8.89)$$

где

$$\left. \begin{aligned} d_0 &= (B+b)^2; \quad d_1 = 2k_0(B+b); \\ d_2 &= (A+2b)^2 \Omega^2 + 2(B+b)\varepsilon_0 + k_0^2; \\ d_3 &= 2k_0[(A+2b)\Omega^2 + \varepsilon_0]; \quad d_4 = \varepsilon_0^2 + k_0^2 \Omega^2; \end{aligned} \right\} \quad (8.90)$$

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= (B+b)^2; \quad f_1 = k_0(B+b); \\ f_2 &= (A+a+b-c)(A+2b)\Omega^2 - (B+b)\varepsilon_0; \\ f_3 &= k_0(A+a+b-c)\Omega^2; \end{aligned} \right\} \quad (8.91)$$

$$\left. \begin{aligned} g_0 &= -(B+b)(b+c-a)\Omega; \\ g_1 &= k_0(A-B+a-c)\Omega; \\ g_3 &= (A+a+b-c)\Omega \varepsilon_0. \end{aligned} \right\} \quad (8.92)$$

Учитывая то обстоятельство, что коэффициент демпфирования  $k_0$  весьма мал, в выражении для  $d_2$  можно пренебречь величиной  $k_0^2$ .

Обращаясь вновь к уравнению (8.83), отметим, что для минимизации упругих моментов, действующих на ротор, необходимо выполнить условие динамической настройки

$$\varepsilon_0 = k_n - (b + c - a)\Omega^2 = 0, \quad (8.93)$$

где  $\varepsilon_0$  имеет размерность угловой жесткости. Если  $\varepsilon_0 \neq 0$ , условие динамической настройки нарушается, при этом параметр  $\varepsilon_0$  будем называть абсолютной расстройкой, которая проявляется как остаточная жесткость подвеса. Одновременно введем понятие относительной расстройки как отношение абсолютной расстройки (или остаточной жесткости) к приведенной жесткости упругих элементов, удовлетворяющей условию динамической настройки:

$$\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{k_{n0}} = \frac{\varepsilon_0}{(b + c - a)\Omega_0^2}, \quad (8.94)$$

где  $k_{n0}$  и  $\Omega_0$  – соответственно приведенная угловая жесткость упругих элементов и угловая скорость вращения вала, удовлетворяющие условию динамической настройки.

### 8.7. Собственные передаточные функции двухколечного ДНГ

При рассмотрении динамики одноколечного гироскопа было установлено, что наиболее благоприятным режимом его работы будет настроенный режим. Это справедливо и для ДНГ с двухколечным подвесом. Однако вследствие неточности динамической настройки и воздействия дестабилизирующих факторов во время эксплуатации гироскопа возникает расстройка гироскопа. Для дальнейших исследований применим гипотезу о ее малости:

$$\delta_\varepsilon \ll 1. \quad (8.95)$$

Заметим также, что в существующих конструкциях гироскопов справедливы следующие соотношения между коэффициентами полиномов знаменателя и числителя и собственной передаточной функции при выполнении условия (8.95):

$$\left. \begin{array}{l} d_2 \gg d_0; \\ d_0 \sim d_1; \\ d_2 \gg d_4; \\ d_2 \sim d_3; \\ d_4 \gg d_0; \\ f_2 \gg f_0; \\ f_0 \sim f_1; \\ f_2 \sim f_3. \end{array} \right\} \quad (8.96)$$

С учетом условий (8.96) указанные полиномы достаточно точно разлагаются на типовые звенья с помощью метода Лина. Его сущность поясним на примере полинома, стоящего в знаменателе передаточных функций. Прежде всего

заметим, что последние коэффициента ( $d_2$ ,  $d_3$  и  $d_4$ ) существенно отличаются от первых двух ( $d_0$  и  $d_1$ ). Поэтому в области низких частот выделим полином

$$\sum_{j=0}^4 d_j p^{4-j} \approx d_2 p^2 + d_3 p + d_4.$$

Однако на высоких частотах будет сказываться погрешность от такого представления. Для ее устранения выделенный полином второго порядка необходимо умножить на некоторый неизвестный пока полином также второго порядка так, чтобы в результате получился исходный многочлен. Следовательно, искомый множитель можно найти в результате деления исходного полинома на выделенный, которое удобнее всего выполнить столбиком. При этом необходимо принимать во внимание соотношения между коэффициентами.

$$\begin{array}{r} d_0 p^4 + d_1 p^3 + d_2 p^2 + d_3 p + d_4 \quad \left| \begin{array}{l} d_2 p^2 + d_3 p + d_4 \\ \hline \frac{d_0}{d_2} p^2 + \frac{d_1 d_2 - d_0 d_3}{d_2} p + 1 \end{array} \right. \\ - \\ \hline d_0 p^4 + \frac{d_0 d_3}{d_2} p^3 + \frac{d_0 d_4}{d_2} p^2 \\ \hline \frac{d_1 d_2 - d_0 d_3}{d_2} p^3 + d_2 p^2 + d_3 p \\ - \\ \hline \frac{d_1 d_2 - d_0 d_3}{d_2} p^3 + \frac{d_1 d_2 - d_0 d_3}{d_2^2} d_3 p^2 - \frac{d_1 d_2 - d_0 d_3}{d_2^2} d_4 p \\ \hline d_2 p^2 + d_3 p + d_4 \\ - \\ \hline d_2 p^2 + d_3 p + d_4 \\ \hline 0 \end{array}$$

В силу неравенств (8.96) имеем:

$$d_2 \gg \frac{d_0 d_4}{d_2}; \quad d_2 \gg \frac{d_1 d_2 - d_0 d_3}{d_2^2} d_3; \quad d_3 \gg \frac{d_1 d_2 - d_0 d_3}{d_2^2} d_4.$$

Это и дало основание при вычитании одного полинома из другого пренебречь соответствующими коэффициентами. Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^4 d_j p^{4-j} &= d_4 \left( \frac{d_2}{d_4} p^2 + \frac{d_2}{d_4} p + 1 \right) \left( \frac{d_0}{d_2} p^2 + \frac{d_1 d_2 - d_0 d_3}{d_2^2} p + 1 \right) = \\ &= d_4 (T_1^2 p^2 + 2T_1 \xi_1 p + 1) (T_3^2 p^2 + 2T_3 \xi_3 p + 1). \end{aligned} \quad (8.97)$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^3 f_i p^{3-i} &= f_3 \left( \frac{f_2}{f_3} p + 1 \right) \left( \frac{f_0}{f_2} p^2 + \frac{f_1 f_2 - f_0 f_3}{f_2^2} p + 1 \right) = \\ &= f_3 (T_2 p + 1) (T_4^2 p^2 + 2T_4 \xi_4 p + 1). \end{aligned} \quad (8.98)$$

Теперь, исходя из равенств (8.97) и (8.98), найдем параметры типовых звеньев (постоянные времени и коэффициенты демпфирования):

$$T_1 = \sqrt{\frac{d_2}{d_4}} = \sqrt{\frac{(A+2b)^2 \Omega^2 + 2(B+b)\varepsilon_0}{\varepsilon_0^2 + k_o^2 \Omega^2}}; \quad (8.99)$$

$$\xi_1 = \frac{d_3}{d_4} \cdot \frac{1}{2T_1} = \frac{k_o [(A+2b)\Omega^2 + \varepsilon_0]}{[(A+2b)^2 \Omega^2 + 2(B+b)\varepsilon_0] \cdot [\varepsilon_0^2 + k_o^2 \Omega^2]}; \quad (8.100)$$

$$T_3 = \sqrt{\frac{d_0}{d_2}} = \frac{B+b}{\sqrt{(A+2b)^2 \Omega^2 + 2(B+b)\varepsilon_0}}; \quad (8.101)$$

$$\xi_3 = \frac{d_1 d_2 - d_0 d_3}{d_2^2} \cdot \frac{1}{2T_3} = \frac{k_o [(A+2b)(A-B+b)\Omega^2 + (B+b)\varepsilon_0]}{\sqrt{(A+2b)^2 \Omega^2 + 2(B+b)\varepsilon_0}}; \quad (8.102)$$

$$T_2 = \frac{f_2}{f_3} = \frac{A+2b}{k_o} \left[ 1 + \frac{(B+b)\varepsilon_0}{(A+2b)(A+a+b-c)\Omega^2} \right]; \quad (8.103)$$

$$T_4 = \sqrt{\frac{f_0}{f_2}} = \frac{B+b}{\sqrt{(A+2b)(A+a+b-c)\Omega^2 + (B+b)\varepsilon_0}}; \quad (8.104)$$

$$\xi_4 = \frac{f_1 f_2 - f_0 f_3}{f_2^2} \cdot \frac{1}{2T_4} = \frac{k_o [(B+b)\varepsilon_0 + (A+2b)(A+a+b-c)\Omega^2]}{2\sqrt{[(B+b)\varepsilon_0 + (A+2b)(A+a+b-c)\Omega^2]^3}}. \quad (8.105)$$

Учитывая малость расстройки, выраженную неравенством (8.95), разложим правые части равенств (8.99)...(8.105) в ряд Маклорена относительно переменной  $\varepsilon_0$ , удерживая в них члены до первого порядка малости. В результате преобразования получаем:

$$T_1 = \frac{(A+2b)\Omega}{\sqrt{\varepsilon_0^2 + k_o^2 \Omega^2}} \left[ 1 + \frac{(B+b)\varepsilon_0}{(A+2b)^2 \Omega^2} \right]; \quad (8.106)$$

$$T_2 = \frac{A+2b}{k_o} \left[ 1 + \frac{(B+b)\varepsilon_0}{(A+2b)(A+a+b-c)\Omega^2} \right]; \quad (8.107)$$

$$T_3 = \frac{B+b}{(A+2b)\Omega} \left[ 1 - \frac{(B+b)\varepsilon_0}{(A+2b)^2\Omega^2} \right]; \quad (8.108)$$

$$T_4 = \frac{B+b}{\Omega\sqrt{(A+2b)(A+a+b-c)}} \left[ 1 - \frac{(B+b)\varepsilon_0}{2(A+2b)(A+a+b-c)\Omega^2} \right]; \quad (8.109)$$

$$\xi_1 = \frac{k_o\Omega}{\sqrt{\varepsilon_0^2 + k_o^2\Omega^2}} \left[ 1 + \frac{(A-B+b)\varepsilon_0}{(A+2b)^2\Omega^2} \right]; \quad (8.110)$$

$$\xi_3 = \frac{k_o(A-B+b)}{(A+2b)^2\Omega} \left[ 1 + \frac{(2A-3B+b)(B+b)\varepsilon_0}{(A+2b)^2(A-B+b)\Omega^2} \right]; \quad (8.111)$$

$$\xi_4 = \frac{k_o(A-B+b)}{2\Omega\sqrt{(A+a+b-c)(A+2b)^3}} \left[ 1 + \frac{(B+b)(3B-A+b)\varepsilon_0}{2(A+2b)(A-B+b)(A+a+b-c)\Omega^2} \right]. \quad (8.112)$$

Формулы (8.106)...(8.112) являются основными соотношениями для расчета динамических параметров собственного канала рассматриваемого гироскопа. Теперь равенство (8.86) можно представить в виде

$$W_{\alpha,\omega\xi}(p) = W_{\beta,\omega\zeta}(p) = -\frac{K_{11}(T_2p+1)(T_4^2p^2+2T_4\xi_4p+1)}{(T_1^2p^2+2T_1\xi_1p+1)(T_3^2p^2+2T_3\xi_3p+1)}, \quad (8.113)$$

где

$$K_{11} = \frac{f_3}{d_4} = \frac{k_o(A+a+b-c)\Omega^2}{\varepsilon_0^2 + k_o^2\Omega^2}. \quad (8.114)$$

Сравнивая (8.106) с (8.31), можно отметить большое сходство этих формул. Как и в случае одноколечного гироскопа, постоянную времени  $T_1$  будем называть постоянной времени тяжения. Если гироскоп точно настроен, т.е.  $\varepsilon_0 = 0$ , она достигает своего максимального значения:

$$T_1 = T_2 \frac{A+2b}{k_o}.$$

При этом  $\varepsilon_1 = 1$  и первое звено знаменателя разлагается на два аperiодических с постоянной времени  $T_1$ , а передаточная функция упрощается:

$$W_{\alpha,\omega\xi}(p) = W_{\beta,\omega\zeta}(p) = -\frac{K_{11}(T_4^2p^2+2T_4\xi_4p+1)}{(T_1p+1)(T_3^2p^2+2T_3\xi_3p+1)}. \quad (8.115)$$

У настроенного гироскопа коэффициент передачи  $K_{11}$  тоже достигает своего максимального значения:

$$K_{11} = \frac{A+a+b-c}{k_o},$$

$T_3$  является нутационной постоянной времени. Так как инерционность ротора значительно превосходит инерционность колец подвеса, то нетрудно заметить, сравнивая равенства (8.108) и (8.109), что  $T_4$  близка по величине к  $T_3$ , но практически не может быть равна ей. Необходимо также отметить, что влияние расстройки на эти параметры и коэффициент демпфирования  $\xi_3$  пренебрежимо мало. Из сравнения передаточной функции ДНГ с одноколечным (8.44) и двухколечным (8.113) подвесом видно, что количество резонансных частот первого в два раза больше, чем второго. Таким образом, и по этому показателю рассматриваемый гироскоп имеет преимущество. Примерный вид логарифмических амплитудных характеристик этих двух типов ДНГ приведен на рисунке 8.7.

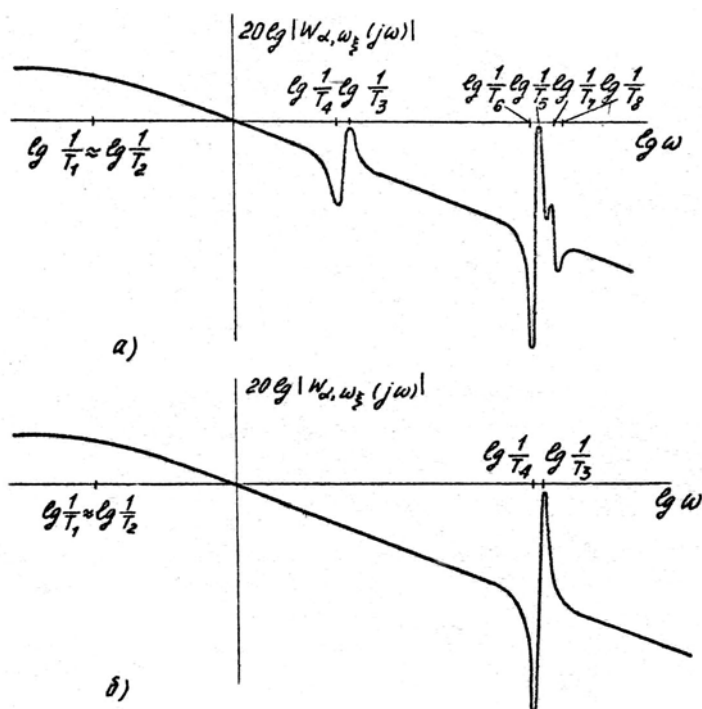


Рис. 8.7. Логарифмические амплитудные частотные характеристики собственного канала динамически настраиваемого гироскопа: а) – с одноколечным подвесом; б) – с двухколечным подвесом

## 8.8. Перекрестные связи двухколечного ДНГ

Рассмотрим теперь передаточные функции перекрестного канала. Разложение знаменателя соответствует равенству (8.97), а числитель являющийся полиномом второго порядка, будет рассмотрен ниже. Так как его свободный член  $g_2$  – см. (8.92) – линейно зависит от расстройки, вид искомой передаточной функции будет существенно зависеть от величины и знака  $\varepsilon_0$ .

Когда дискриминант  $g_1^2 - 4g_0g_2$  неотрицателен, числитель разлагается на два звена первого порядка. В противном случае он представляет собой одно звено второго порядка. Особым является условие точной динамической настройки, когда  $g_2 = 0$ . Рассмотрим все возможные значения расстройки.

1) Пусть  $g_1^2 - 4g_0g_2 < 0$ . При этом

$$\varepsilon_0 < \frac{k_o^2(A-B+a-c)^2}{4(B+b)(b+c-a)(A+a+b-c)}. \quad (8.116)$$

Тогда

$$W_{\alpha, \omega_\zeta}(p) = -\frac{K_{12}(T_5^2 p^2 + 2T_5 \xi_5 p + 1)}{(T_1^2 p^2 + 2T_1 \xi_1 p + 1)(T_3^2 p^2 + 2T_3 \xi_3 p + 1)}, \quad (8.117)$$

где

$$T_5 = \sqrt{\frac{g_0}{g_2}} = \sqrt{\frac{(B+b)(b+c-a)}{-(A+a+b-c)\varepsilon_0}}; \quad (8.118)$$

$$\xi_5 = \frac{g_1}{2\sqrt{g_0g_2}} = \frac{k_o(A-B+a-c)}{2\sqrt{-(B+b)(b+c-a)(A+a+b-c)\varepsilon_0}}; \quad (8.119)$$

$$K_{12} = \frac{g_0}{d_4} = \frac{(A+a+b-c)\Omega\varepsilon_0}{\varepsilon_0^2 + k_o^2\Omega^2}. \quad (8.120)$$

2) Условие  $g_1^2 - 4g_0g_2 \geq 0$  выполнено для всех следующих ниже вариантов. Имея в виду, что  $\varepsilon_0 = 0$  является особым случаем, получаем

$$-\frac{k_o^2(A-B+a-c)^2}{4(B+b)(b+c-a)(A+a+b-c)} \leq \varepsilon_0 < 0.$$

Тогда

$$W_{\alpha, \omega_\zeta}(p) = -\frac{K_{12}(1-T_5p)(1-T_6p)}{(T_1^2 p^2 + 2T_1 \xi_1 p + 1)(T_3^2 p^2 + 2T_3 \xi_3 p + 1)}, \quad (8.121)$$

где

$$T_5 = \frac{-2g_0}{g_1 - \sqrt{g_1^2 - 4g_0g_2}} = \frac{2(B+b)(b+c-a)}{k_o(A-B+a-c)-u}; \quad (8.122)$$

$$T_6 = \frac{-2g_0}{g_1 + \sqrt{g_1^2 - 4g_0g_2}} = \frac{2(B+b)(b+c-a)}{k_o(A-B+a-c)+u}; \quad (8.123)$$

$$u = \sqrt{k_o^2(A-B+a-c)^2 + 4(B+b)(b+c-a)(A+a+b-c)\varepsilon_0}, \quad (8.124)$$

а  $K_{12}$  находится из формулы (8.120).

3) Гироскоп точно настроен, т.е.  $\varepsilon_0 = 0$ , тогда

$$W_{\alpha, \omega_\zeta}(p) = \frac{K_{120}p(1-T_5p)}{(T_1^2 p^2 + 2T_1 \xi_1 p + 1)(T_3^2 p^2 + 2T_3 \xi_3 p + 1)}, \quad (8.125)$$

где

$$T_5 = -\frac{g_0}{g_1} = \frac{(B+b)(b+c-a)}{k_o(A-B+a-c)}; \quad (8.126)$$

$$K_{120} = \frac{g_1}{d_4} = \frac{A+a+b-c}{k_o\Omega}. \quad (8.127)$$



4) Пусть теперь  $\varepsilon_0 > 0$ , тогда

$$W_{\alpha, \omega \zeta}(p) = \frac{K_{12}(1 + T_5 p)(1 - T_6 p)}{(T_1^2 p^2 + 2T_1 \xi_1 p + 1)(T_3^2 p^2 + 2T_3 \xi_3 p + 1)}, \quad (8.128)$$

где

$$T_5 = \frac{2(B+b)(b+c-a)}{u - k_0(A-B+a-c)}, \quad (8.129)$$

$$T_6 = \frac{2(B+b)(b+c-a)}{u + k_0(A-B+a-c)}, \quad (8.130)$$

а  $K_{12}$  находится из формулы (8.120).

Примерный вид логарифмических амплитудных частотных характеристик перекрестного канала ДНГ для двух значений расстройки в сравнении с собственным каналом приведен на рисунке 8.8.

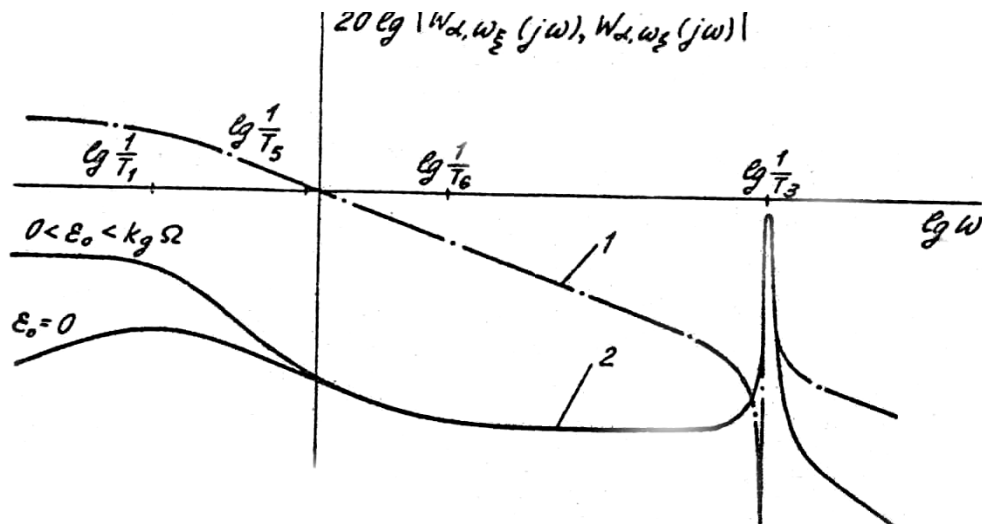


Рис. 8.8. Логарифмические амплитудные частотные характеристики ДНГ с двухколечным подвесом: 1 – собственный канал; 2 – перекрестная связь

Из графиков видно, что уровень перекрестной связи, являющейся помехой, существенно зависит от расстройки в низкочастотном диапазоне и практически не зависит от нее на высоких частотах, причем на нутационной частоте амплитуда колебаний ротора от влияния собственного и перекрестного входного воздействия одинакова. Это означает, что реакция гироскопа на импульс относительно одной оси представляет собой колебания ротора с частотой нутации относительно двух осей, которые образуют в пространстве коническое движение вектора его кинетического момента. Отметим также, что точно настроенный ДНГ имеет минимальный уровень перекрестных связей. При возникновении малой расстройки этот уровень существенно меняется, в то время как характеристики собственного канала остаются практически неизменными.

## 8.9. Статические характеристики двухколечного ДНГ

Как и ранее, будем искать статические характеристики гироскопа из передаточных функций (8.86) и (8.88) при условии  $p \rightarrow 0$ . Такими параметрами будут коэффициенты  $K_{11}$  и  $K_{12}$ , определяемые из формул (8.114) и (8.120). Преобразуем их к виду, удобному для общего рассмотрения. Под безразмерными коэффициентами передачи, обозначаемыми далее через  $\bar{K}_{11}$  и  $\bar{K}_{12}$  соответственно, будем понимать отношение их текущего значения к значению коэффициента  $K_{11}$

$$\text{при } \varepsilon_0 = 0: \quad \bar{K}_{11} = \frac{k_0^2 \Omega^2}{\varepsilon_0^2 + k_0^2 \Omega^2}; \quad (8.131)$$

$$\bar{K}_{12} = \frac{k_0 \Omega \varepsilon_0}{\varepsilon_0^2 + k_0^2 \Omega^2}. \quad (8.132)$$

$$\text{Из равенства (8.94)} \quad \varepsilon_0 = \delta_\varepsilon (b + c - a) \Omega_0^2. \quad (8.133)$$

Подставим это выражение в (8.131) и (8.132):

$$\bar{K}_{11} = \frac{1}{1 + \delta_\varepsilon^2 K_B^2}; \quad (8.134)$$

$$\bar{K}_{12} = \frac{\delta_\varepsilon k_B}{1 + \delta_\varepsilon^2 K_B^2}, \quad (8.135)$$

где

$$K_B = \frac{(b + c - a) \Omega_0^2}{k_0 \Omega} \approx \frac{(b + c - a) \Omega_0}{k_0}. \quad (8.136)$$

В последних трех формулах  $K_B$  – коэффициент влияния расстройки гироскопа на его статические параметры. В существующих конструкциях ДНГ его значения обычно находятся в пределах от 10 до 1000. Из формул (8.134) и (8.135) видно, что чем больше  $K_B$ , тем сильнее влияние расстройки на коэффициенты передачи  $\bar{K}_{11}$  и  $\bar{K}_{12}$ . По равенствам (8.134) и (8.135) построены их графические относительной расстройки при трех различных значениях  $K_B$  (рис. 8.9).

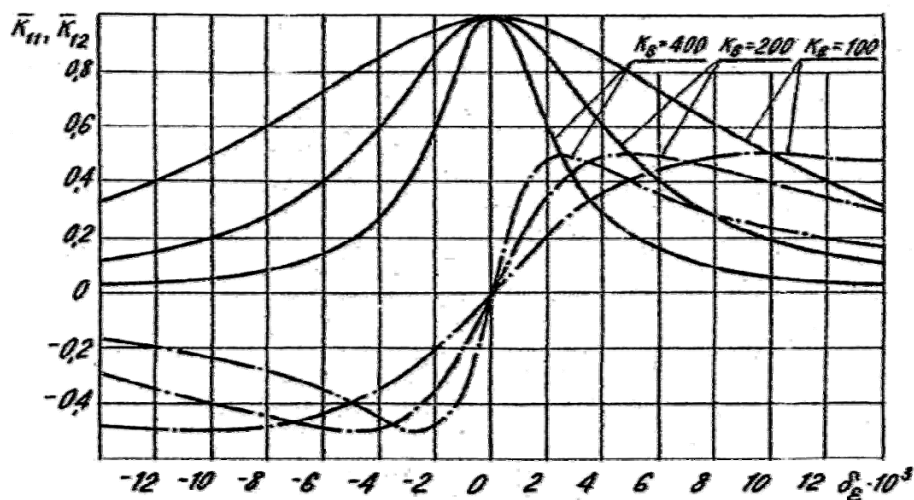


Рис. 8.9. Влияние расстройки на коэффициенты передачи ДНГ: сплошная линия – собственный канал, штрихпунктирная – перекрестный

Из сравнения рисунков 8.5 и 8.9 видно, что характер зависимости статических параметров от расстройки одинаков для ДНГ с одно- и двухколечным подвесом.

Так как перекрестные связи в гироскопе являются помехами, то нормальная работа гироскопа возможна при таких значениях расстройки, когда  $\bar{K}_{11} \gg \bar{K}_{12}$ . Обозначим через  $K_{\Pi}$  коэффициент подавления перекрестной связи в статическом режиме, являющийся отношением угла отклонения ротора относительно оси действия входной угловой скорости к углу его отклонения относительно оси, перпендикулярной первой и свободной от входных воздействий. Нетрудно догадаться, что

$$K_{\Pi} = \frac{\bar{K}_{11}}{|\bar{K}_{12}|} = \frac{1}{|\delta_{\varepsilon}| K_B} = \frac{k_o \Omega}{|\varepsilon_0|}. \quad (8.137)$$

Из формулы (8.137) найдем такое значение расстройки, при которой значения собственного и перекрестного коэффициента передачи становятся одинаковыми, т.е.  $K_{\Pi} = 1$ :

$$|\delta_{\varepsilon}| = \frac{1}{K_B} \quad (8.138)$$

или

$$|\varepsilon_0| = k_o \Omega. \quad (8.139)$$

Из формул (8.134) и (8.135) получим

$$\bar{K}_{11} = \bar{K}_{12} = 0,5. \quad (8.140)$$

Рассмотрим в качестве иллюстрации полученных результатов числовой пример. Будем считать, что расстройка ДНГ обусловлена несовпадением действительного значения угловой скорости вала с величиной, необходимой для выполнения условия динамической настройки, т.е.  $\Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega$ , причем  $\Delta\Omega$  – погрешность угловой скорости, являющаяся малой величиной. Подставляя это выражение в (8.93), получаем

$$\varepsilon_0 = K_{\Pi} - (b+c-a)\Omega_0^2 - 2(b+c-a)\Delta\Omega \cdot \Omega_0 - (b+c-a)\Delta\Omega^2 \approx -2(b+c-a)\Omega_0\Delta\Omega, \quad (8.141)$$

так как  $\Delta\Omega^2$  – величина второго порядка малости, которой можно пренебречь, а  $K_{\Pi} - (b+c-a)\Omega_0^2 = 0$  в силу условия динамической настройки. Из равенства (7.141) нетрудно получить с учетом (8.94) выражение для относительной расстройки

$$\delta_{\varepsilon} = -2\delta_{\Omega}, \quad (8.142)$$

где  $\delta_{\Omega} = \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0}$  – относительная погрешность угловой скорости приводного вала.

Пусть для рассматриваемого нами гироскопа  $K_B = 100$ , а по техническим условиям уровень перекрестных связей должен быть не менее чем в 200 раз меньше уровня полезного сигнала, т.е.  $K_{\Pi} \gg 200$ .

Из формулы (8.137) находим

$$|\delta_\varepsilon| \ll \frac{1}{K_{II} K_B} = 5 \cdot 10^{-5}.$$

Тогда согласно равенству (8.142)

$$|\delta_\Omega| \ll 2,5 \cdot 10^{-5} = 0,0025\%.$$

Таким образом, для получения достаточно точной информации от динамически настраиваемого гироскопа необходимо обеспечить высокую точность его настройки и стабильность угловой скорости вращения вала. Используя формулу (8.138), находим такое относительное изменение скорости вращения, при котором коэффициенты передачи собственного и перекрестного канала совпадут по величине:

$$|\delta_\varepsilon| = \frac{1}{2K_B} = 5 \cdot 10^{-3} = 0,5\%.$$

Так, например, при использовании в ДНГ синхронного гистерезисного двигателя с частотой питания 200 Гц отклонение ее на 1 Гц (что составляет 0,5%) приведет к потере работоспособности гироскопа вследствие недопустимого уровня перекрестных помех. Совершенно очевидно, что применять асинхронный двигатель для приведения во вращение динамически настраиваемого гироскопа нельзя. Это справедливо как для одно-, так и для двухколечного ДНГ.

Итак, в результате рассмотрения основ теории динамически настраиваемых гироскопов мы выявили ряд особенностей их кинематики, динамики и статики, отличающих эти приборы от классических трехстепенных гироскопов в кардановом подвесе. Он, в свою очередь, определяют особенности конструкции таких ДНГ, которым посвящена следующая глава.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие преимущества имеют динамически настраиваемые гироскопы по сравнению с гироскопами в кардановом подвесе?
2. В каких системах координат записываются уравнения движения роторных вибрационных гироскопов?
3. В чем состоит суть динамической настройки ДНГ с одно- и двухколечным подвесом?
4. Чем отличаются уравнения движения ДНГ с одно- и двухколечным подвесом?
5. В чем причина угловой скорости дрейфа ДНГ с одноколечным подвесом при наличии угловой вибрации на двойной частоте вращения ротора?
6. Как влияет демпфирование на динамические свойства ДНГ?
7. К чему приводит не выполнение условия динамической настройки ДНГ?

## 9. ОСЦИЛЛЯТОРНЫЕ ВИБРАЦИОННЫЕ ГИРОСКОПЫ

Главным отличительным признаком осцилляторных вибрационных гироскопов (ОВГ) является колебательное движение чувствительного элемента. Относительное движение чувствительного элемента (ОВГ) может быть не только угловым, но и возвратно-поступательным, например, в виде поперечных колебаний струны или стержня, упруго подвешенной массы и т.п.

### 9.1. Камертонный гироскоп

В качестве примера рассмотрим вибрационный гироскоп камертонного типа фирмы «Сперри», который является одним из первых промышленных образцов (рис. 9.1).

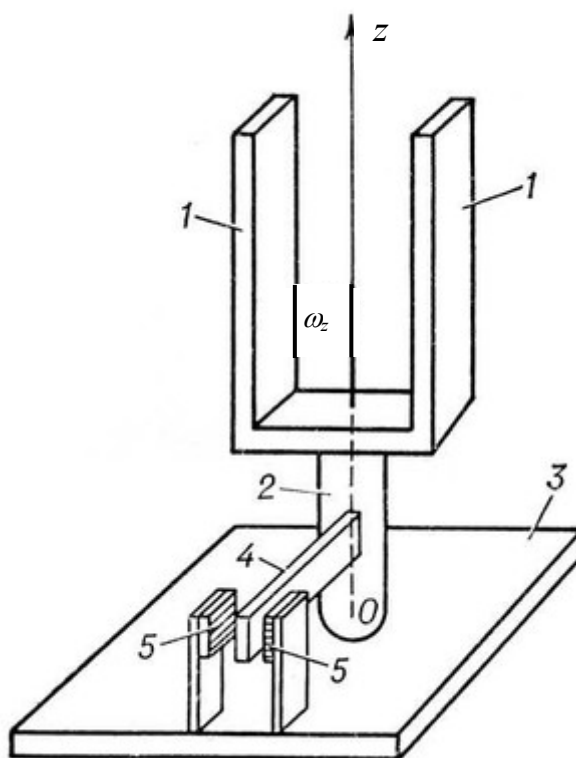


Рис. 9.1. Конструктивная схема камертонного гироскопа:  
1 – стержни; 2 – упругий торсион;  
3 – основание; 4 – пластинки; 5 – катушки

Чувствительным элементом прибора является вибратор, состоящий из стержней 1, упругого торсиона 2, связывающего стержни с основанием 3 вибратора, пластинки 4, жестко скрепленной с торсионом и перемещающейся в поле катушек 5, укрепленных на основании 3. Ветви вибратора-камертона с помощью специальной электрической схемы приводятся в колебательное движение. Если при этом объект вместе с основанием 3 вибратора поворачивается вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega_z$ , то возникает момент Кориолиса сил инерции, вызывающий крутильные колебания вибратора вокруг оси  $z$ . При этом пластинка 4 колеблется между катушками 5; амплитуда колебаний

пропорциональна угловой скорости  $\omega_z$ . Значение  $\omega_z$  снимают с катушек 5 с помощью радиотехнических методов.

Получим простейшие аналитические соотношения, характеризующие работу прибора. На рисунке 9.2 изображена расчетная схема прибора, на которой стержни заменены грузами массой  $m$  и отклоняются в разные стороны от оси  $z$  с линейной скоростью  $V$ .

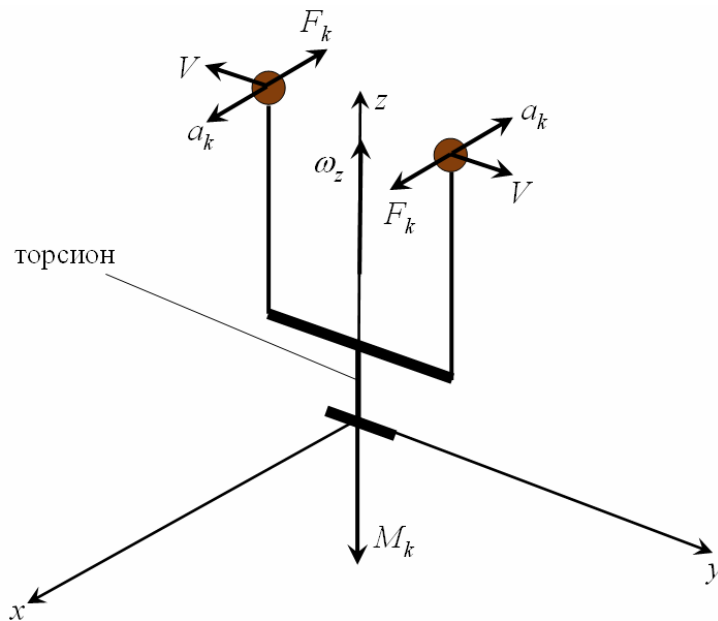


Рис. 9.2. Расчетная схема прибора

При вращении основания с угловой скоростью  $\omega_z$  грузы будут двигаться с ускорением Кориолиса  $a_k = 2 \omega_z V$ . Так как стержни колеблются в разные стороны, ускорения грузов направлены в разные стороны, следовательно, к центрам масс будут приложены противоположно направленные силы инерции  $F_k = 2m\omega_z V$ . Пара сил, образованная силами  $F_k$  на плече  $R$ , создает момент инерционных сил Кориолиса вокруг оси  $z$ :

$$M_k = 4m\omega_z VR,$$

где  $R = R_0 + R_a \sin \omega t$  – расстояние от оси  $z$  до центров масс грузов;  $R_a$  – амплитуда колебаний грузов;  $\omega$  – частота колебаний грузов;  $V = \dot{R} = R_a \omega \cos \omega t$  – линейная скорость грузов.

## 9.2. Уравнение движения камертонного гироскопа

Введем следующие обозначения:

$J$  – момент инерции прибора относительно оси  $z$ ;

$\gamma, \dot{\gamma}$  – угол и угловая скорость поворота элементов гироскопа вокруг торсиона;

$c_T$  – угловая жесткость торсиона;

$k_d$  – коэффициент демпфирования вокруг оси торсиона.

Запишем сумму моментов относительно оси  $z$ :

$$-J(\ddot{\gamma} + \dot{\omega}_z) - k_d \dot{\gamma} - c_T \gamma - M_k = 0,$$

где  $M_k = 4m\omega_z(R_0 + R_a \sin \omega t) R_a \omega \cos \omega t \approx 4m\omega_z R_0 R_a \omega \cos \omega t$   
или при  $\omega = const$

$$J\ddot{\gamma} + k_o \dot{\gamma} + c_T \gamma = -4mR_a R_0 \omega \omega_z \cos \omega t.$$

Разделив все члены уравнения на  $J$ , получим:

$$\ddot{\gamma} + 2d\omega_0 \dot{\gamma} + \omega_0^2 \gamma = -\omega_0^2 K \omega_z \cos \omega t, \quad (9.1)$$

где  $2d\omega_0 = \frac{k_o}{J}; \quad \omega_0^2 = \frac{c_T}{J}; \quad K = \frac{4mR_a R_0 \omega}{c_T}.$

Частное решение уравнения (9.1) запишем в виде:

$$\gamma = D_1 \sin \omega t + D_2 \cos \omega t.$$

Проделив необходимые преобразования, получим

$$\gamma = \gamma_a \cos(\omega t - \varphi),$$

где  $\gamma_a = \frac{K\omega_0^2 \omega_z}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2 \omega_0^2 \omega^2}}$  – амплитуда вынужденных колебаний гироскопа

вокруг оси торсиона;  $tg \varphi = \frac{2d\omega_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$  – фазовый сдвиг.

Таким образом, амплитуда вынужденных колебаний гироскопа вокруг оси торсиона пропорциональна измеряемой угловой скорости.

### 9.3. Грибовидный гироскоп

Найдем амплитуду выходных колебаний грибовидного осцилляторного вибрационного гироскопа [2] в предположении малости отклонений  $x$  и  $y$  (рис. 9.3). Массой упругого стержня 2 по сравнению с массой  $m$  головки 4 пренебрежем и будем считать движение головки совершающимся в плоскости  $xAy$ .

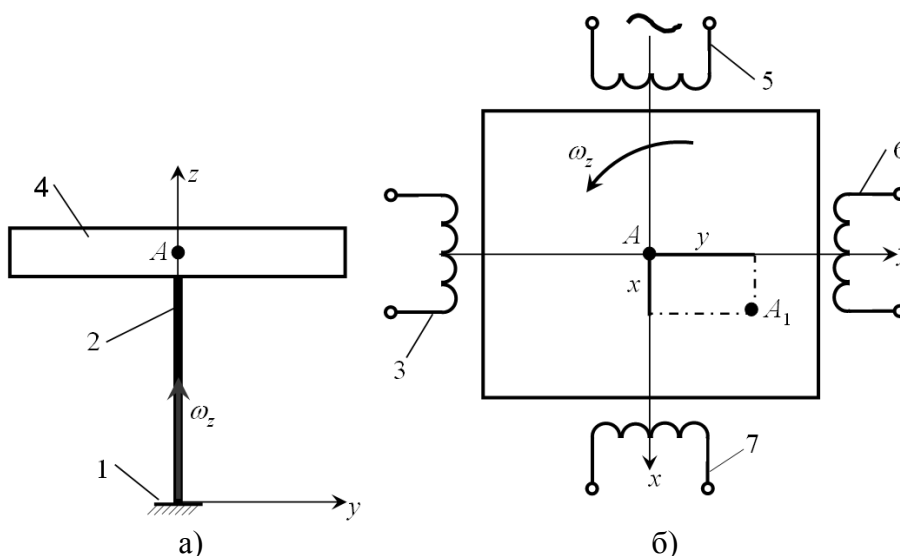


Рис. 9.3. Схема грибовидного осцилляторного вибрационного гироскопа:

1 – корпус; 2 – ножка; 3 и 6 – датчик колебаний;  
4 – головка; 5 и 7 – привод (возбудитель)

Допустим для простоты, что прибор вращается вокруг оси  $z$  относительно инерциального пространства с угловой скоростью  $\omega_z$  и найдем движение центра тяжести  $A$  массы головки 4 в системе координат  $Oxuz$ , связанной с прибором (объектом). Пусть центр тяжести  $A$  массы головки 4 (см. рис. 9.3, б)) переместился в точку  $A$ . Тогда проекции абсолютной скорости точки  $A$  на оси  $x$  и  $y$  будут равны  $v_x = \dot{x} - y\omega_z$ ;  $v_y = \dot{y} + x\omega_z$ .

Выражения для кинетической энергии  $T$ , потенциальной энергии  $\Pi$  и диссипативной функции  $\Phi$  имеют вид

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m[(\dot{x} - y\omega_z)^2 + (\dot{y} + x\omega_z)^2] \\ \Pi &= \frac{1}{2}(c_x x^2 + c_y y^2) \\ \Phi &= \frac{1}{2}[k_{ox}(\dot{x} - y\omega_z)^2 + k_{oy}(\dot{y} + x\omega_z)^2] \end{aligned} \quad (9.2)$$

где  $k_{ox}, k_{oy}$  – коэффициенты демпфирования;  $c_x, c_y$  – коэффициенты, характеризующие жесткость присоединения массы  $m$  к основанию.

Подставив выражения (9.2) в уравнения Лагранжа второго рода, получим систему уравнений движения осцилляторного вибрационного гироскопа:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2d_x \Omega_x \dot{x} + (\Omega_x^2 - \omega_z^2)x - 2\omega_z \dot{y} - (2d_x \Omega_x \omega_z - \dot{\omega}_z)y &= f \sin \omega t; \\ \ddot{y} + 2d_y \Omega_y \dot{y} + (\Omega_y^2 - \omega_z^2)y + 2\omega_z \dot{x} + (2d_y \Omega_y \omega_z + \dot{\omega}_z)x &= 0, \end{aligned} \quad (9.3)$$

где  $\Omega_x^2 = \frac{c_x}{m}$ ;  $\Omega_y^2 = \frac{c_y}{m}$ ;  $2d_x \Omega_x = \frac{k_{ox}}{m}$ ;  $2d_y \Omega_y = \frac{k_{oy}}{m}$ ;  $f = \frac{F_a}{m}$ ;  $F_a$  и  $\omega$  – амплитуда и частота силы вдоль оси  $x$  от электромагнитного возбудителя 5 и 7.

Если  $\omega = const$ ,  $\Omega_x \gg \omega_z$  и  $\Omega_y \gg \omega_z$ , то  $x \gg y$  и влиянием движения по координате  $y$  на движение по координате  $x$  можно пренебречь. Тогда уравнения (9.3) примут вид

$$\ddot{x} + 2d_x \Omega_x \dot{x} + \Omega_x^2 x = f \sin \omega t; \quad (9.4)$$

$$\ddot{y} + 2d_y \Omega_y \dot{y} + \Omega_y^2 y = -2\omega_z \dot{x}. \quad (9.5)$$

Из уравнения (9.4) найдем выражение для  $x$

$$x = x_a \sin(\omega t - \varphi), \quad (9.6)$$

$$\text{где } x_a = \frac{f}{\sqrt{(\Omega_x^2 - \omega^2)^2 + 4d_x^2 \Omega_x^2 \omega^2}}; \quad \text{tg } \varphi = \frac{2d_x \Omega_x \omega}{\Omega_x^2 - \omega^2}.$$

Подставив выражение (9.6) в уравнение (9.5), получим

$$y = y_a \cos(\omega t - \varphi - \theta),$$

$$\text{где } y_a = \frac{2\omega_z \omega x_a}{\sqrt{(\Omega_y^2 - \omega^2)^2 + 4d_y^2 \Omega_y^2 \omega^2}}; \quad \text{tg } \theta = \frac{2d_y \Omega_y \omega}{\Omega_y^2 - \omega^2}.$$



При выполнении условия  $\Omega_y = \omega$

$$y = y_a \sin(\omega t - \varphi),$$

где  $y_a = \frac{x_a}{d_y \Omega_y} \omega_z$ .

Если частота возбуждения  $\omega$  отличается от резонансной частоты  $\Omega_y$  на величину  $\Delta\Omega = \Omega_y - \omega$ , причем величина расстройки такова, что относительным коэффициентом демпфирования  $d_y$  можно пренебречь, то

$$y_a = \frac{x_a}{\Delta\Omega} \omega_z.$$

#### 9.4. Микромеханические гироскопы

Разработка перспективных систем навигации и управления движением объектов различного назначения связана с миниатюризацией систем, снижением их стоимости, энергопотребления и эксплуатационных расходов. Миниатюризация навигационных систем требует создания малогабаритных гироскопических датчиков. Поиск новых возможностей создания инерциальных датчиков с требуемыми характеристиками и прогресс в области микроэлектроники привели к появлению нового класса приборов микромеханических гироскопов (ММГ). Появление микромеханических устройств ознаменовало революционные изменения в инерциальной технологии. В настоящее время вопросы создания и использования ММГ привлекают все большее внимание разработчиков и потребителей малогабаритных датчиков параметров движения.

Схемы построения ММГ основаны на принципе работы осцилляторного вибрационного гироскопа. К инерционной массе, имеющей упругую связь с основанием, прикладываются силы  $F_e$  или моменты  $M_e$  и возбуждаются гармонические колебания (линейные или угловые) постоянной амплитуды и частоты. При вращении основания с переносной угловой скоростью  $\Omega$  возникают силы Кориолиса  $F_k$  ( $M_k$ ), воздействующие на инерционную массу и оказывающие давление на упругую связь массы с основанием. Эти силы приводят к колебаниям массы в направлении, перпендикулярном ее относительной скорости и переносной угловой скорости. Амплитуда возникающих колебаний является мерой измеряемой угловой скорости.

По способу реализации движения в ММГ схемы построения можно разделить на схемы с поступательными движениями по координате возбуждения (режимом движения – РД) и по координате выходного сигнала (режимом чувствительности – РЧ) (так называемые LL–гироскопы, *linear-linear*), с угловыми движениями по обеим координатам (RR–гироскопы, *rotate-rotate*) и с различными комбинациями поступательных и угловых движений LR (RL)–гироскопы.

Несмотря на разнообразие конструктивных схем, микромеханические гироскопы имеют общие отличительные признаки, которые необходимо

учитывать при их проектировании. Одной из основных особенностей ММГ является *использование при их производстве материалов и технологий современной твердотельной электроники*. Электромеханические узлы ММГ формируются из неметаллических материалов (монокристаллический кремний, плавленый кварц, карбид кремния и др.) методами фотолитографии, изотропного или анизотропного травления, диффузионной сварки. Важным отличием от стандартных полупроводниковых элементов является то, что ММГ представляют собой трехмерные (3-D) структуры, содержащие подвижную механическую часть с относительно большой толщиной элементов и определенными требованиями к геометрическим параметрам и упругим свойствам.

Отличительным признаком ММГ является *интеграция механических и электрических компонентов*, изготавливаемых одновременно и с использованием однообразных технологических процессов. Механическая часть датчика изготавливается вместе с элементами электроники возбуждения, датчиками съема и преобразования полезного сигнала, элементами формирования обратных связей и позволяет создавать законченные электромеханические узлы.

Следующим отличительным признаком является *групповые методы изготовления ММГ*. Используемая технология микроэлектроники характеризуется коротким циклом группового изготовления, высокой повторяемостью параметров от образца к образцу и обеспечивает массовое производство, позволяя одновременно создавать тысячи датчиков из единой кремниевой заготовки. Следствием этого является уникально низкая стоимость и получение большого количества приборов для испытаний, что обеспечивает высокий темп отработки конструкций и получение ММГ с заданными характеристиками.

Особенностью ММГ является *миниатюризация* чувствительного элемента, обеспечивающая снижение массогабаритных характеристик. Миниатюризация ММГ приводит к тому, что вследствие малой массы и размеров вибрирующие массы имеют высокую частоту собственных колебаний (единицы килогерц). При этом амплитуда колебаний масс очень мала и составляет доли микрометров. Для увеличения амплитуды колебаний при изготовлении ММГ используют материалы с низкими внутренними потерями, такие как кварц и кремний.

Выбор кремниевой технологии определяется не только возможностями микроэлектронной промышленности, но и уникальными свойствами кремния как конструкционного материала. Кремний обладает высокой относительной жесткостью (отношение модуля упругости к удельному весу), который в 2 раза превышает аналогичный показатель стальных сплавов. Благодаря низким внутренним потерям на трение в кремнии ММГ позволяют достичь добротности осциллятора до 50000–80000. Кремний является дешевым и доступным материалом. В некоторых конструкциях используется карбид кремния, обладающий лучшими физическими и эксплуатационными характеристиками и позволяющий повысить температурный диапазон использования ММГ.

### 9.4.1. Одномассовые микромеханические гироскопы LL-типа [25]

На рисунке 9.4 приведены принципиальные схемы чувствительных элементов (ЧЭ), которые применены в большинстве известных конструкций ММГ.

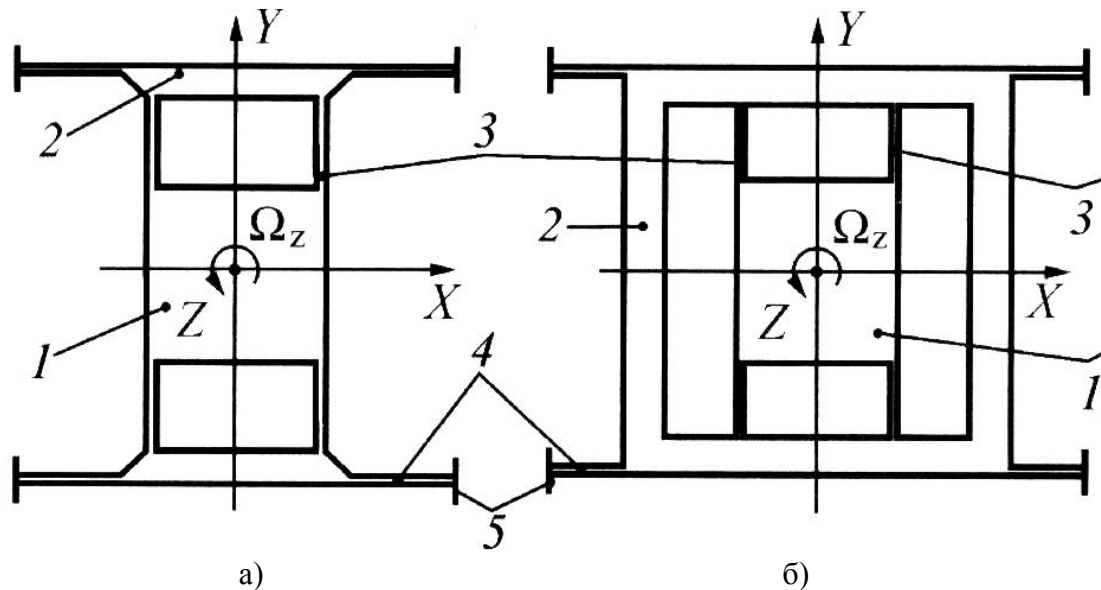


Рис. 9.4. Принципиальные схемы одномассовых чувствительных элементов ММГ:

а) – ЧЭ со спаренными элементами; б) – ЧЭ с разделенными упругими элементами и промежуточной рамкой;

1 – инерционная масса; 2 – жесткие элементы подвеса;

3, 4 – упругие элементы подвеса; 5 – основание

На рисунке 9.4, а) подвес инерционной массы 1 (ИМ) выполнен в виде двух упругих элементов 3, 4, расположенных вне контура ИМ и сопряженных с помощью жестких элементов 2. На рисунке 9.4, б) чувствительный элемент содержит ИМ 1, которая упругими элементами 3 соединена с элементом 2 подвеса в форме рамки, а он упругими элементами 4 связан с основанием 5.

С учетом сил инерции, демпфирования и упругих сил, действующих на инерционную массу (см. рис. 9.4, а)), уравнения ее движения в простейшем случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + k_{ox}\dot{x} + c_x x &= F_a \sin \omega t; \\ m\ddot{y} + k_{oy}\dot{y} + c_y y &= -2m\Omega_z \dot{x}, \end{aligned} \right\}$$

(9.7)

где  $k_{ox}, k_{oy}$  – коэффициенты демпфирования;  $c_x, c_y$  – коэффициенты, характеризующие жесткость присоединения массы  $m$  к основанию.

С учетом сил инерции, демпфирования и упругих сил, действующих на инерционную массу (см. рис. 9.4, б)), уравнения ее движения в простейшем случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x} + k_{ox} \dot{x} + c_x x &= F_a \sin \omega t; \\ (m_1 + m_2) \ddot{y} + k_{oy} \dot{y} + c_y x &= -2m_1 \Omega_z \dot{x}, \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

где  $m_1$  – масса инерционной массы 1;  $m_2$  – масса рамки 2.

Системы уравнений (9.7) и (9.8) по структуре аналогичны системе уравнений (9.4). Таким образом, амплитуда колебаний инерционной массы по координате  $y$  пропорциональна входной угловой скорости.

Принципиальная схема микромеханического гироскопа фирмы The Charles Stark Draper Laboratory, кинематика которого аналогична ЧЭ по рисунку 9.4, а), приведена на рисунке 9.5.

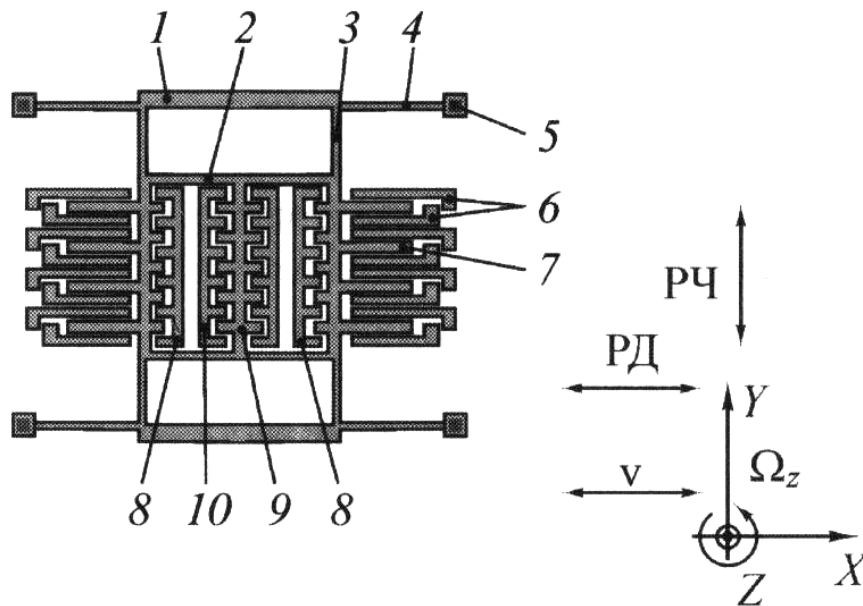


Рис. 9.5. Принципиальные схемы ММГ фирмы The Charles Stark Draper Laboratory:

- 1 – жесткий элемент подвеса; 2 – инерционная масса;
- 3 и 4 – упругие элементы подвеса; 5 – анкер;
- 6 и 7 – электроды емкостного измерителя перемещений в РЧ;
- 8 – неподвижные электроды электростатических приводов;
- 9 и 10 – емкостные измерители перемещений в РД с гребенчатыми структурами

Инерционная масса 2, выполненная в виде рамочной структуры, имеет подвес относительно анкеров 5, связанных с подложкой, состоящий из упругих элементов 3 и 4 (по 4 шт.), каждая пара которых разделена жестким недеформируемым элементом 1. Инерционная масса способна перемещаться вдоль оси  $X$  со скоростью  $v$  с помощью электростатических приводов, неподвижные, гребенчатые структуры 8 которых связаны с подложкой, а подвижные электроды являются частью инерционной массы.

Для измерения перемещений ИМ 2 в режиме движения служит емкостный измеритель 9, гребенчатая структура которого является частью ИМ 2, а две неподвижные структуры электродов 10 соединены с подложкой.

Появление угловой скорости  $\Omega_z$  вокруг оси  $Z$  вызывает перемещение ИМ 2 вместе с элементами 1 под действием сил инерции Кориолиса вдоль оси  $Y$  (РЧ). Перемещения в РЧ измеряются двумя емкостными измерителями перемещений с двух сторон ИМ 2, которые состоят из неподвижных электродов 6, связанных с подложкой, и подвижных 7, являющихся частью ИМ 2. Элементы 1 выполняют функцию усиления жесткости в местах соединения элементов 3 и 4.

Принципиальная схема ММГ фирмы Samsung Electro Mechanics (США), аналогичная схеме по рисунку 9.4, б), приведена на рисунке 9.6.

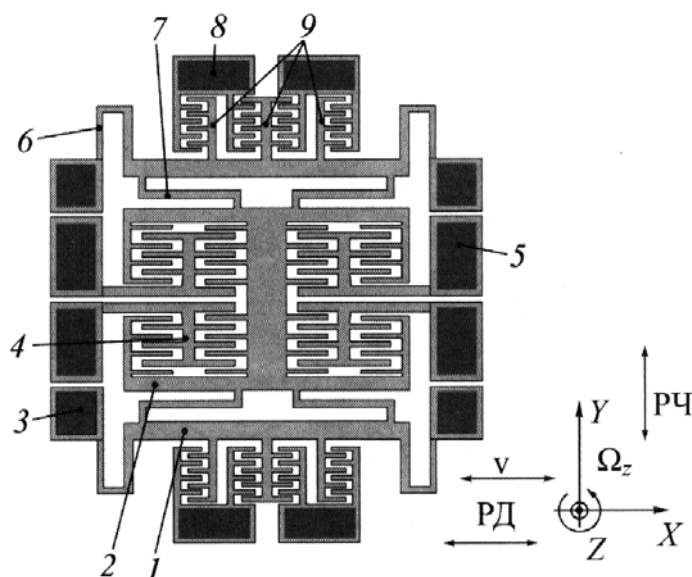


Рис. 9.6. Принципиальные схемы ММГ фирмы Samsung Elektro Mechanics:

- 1 и 2 – инерционные массы; 3, 5 и 8 – анкерные элементы;
- 4 – гребенчатая структура емкостного измерителя;
- 6 и 7 – упругие элементы подвеса;
- 9 – гребенчатые структуры электростатического привода

Микромеханический гироскоп выполнен в виде планарной конструкции на кремниевой подложке и включает в себя наружную 1 и внутреннюю 2 инерционные массы, между которыми находятся четыре упругих элемента 7 подвеса, обеспечивающих возможность перемещений ИМ 2 в направлении оси  $Y$ . Четыре упругих элемента 6 подвеса, размещенных между анкерными элементами 3 и ИМ 1, гарантируют совместное перемещение ИМ в направлении оси  $X$ . Электростатические приводы расположены вдоль оси  $Y$  симметрично относительно ИМ 1 и содержат гребенчатые структуры 9, объединенные с ИМ 1, и аналогичные структуры электродов, являющиеся частью анкерных элементов 8.

Электростатический привод обеспечивает в РД перемещения обеих ИМ со скоростью  $v$  в направлении оси  $X$ . Появление угловой скорости  $\Omega_z$  приводит к вибрационным перемещениям ИМ 2 под действием сил инерции Кориолиса в направлении оси  $Y$  (РЧ). В РЧ перемещения ИМ 2 фиксируются четырьмя емкостными измерителями перемещений, гребенчатые структуры 4 электродов которых являются частью ИМ 2 и частью анкерных элементов 5.

#### 9.4.2. Двухмассовые микромеханические гироскопы LL-типа [25]

Двухмассовые ММГ представляют собой, по существу, различные комбинации одномассовых ММГ с противофазным перемещением ИМ в РД и РЧ.

Принципиальная схема двухмассового ММГ разработки фирмы The Charles Stark Draper Laboratory (США) приведена на рисунке 9.7.

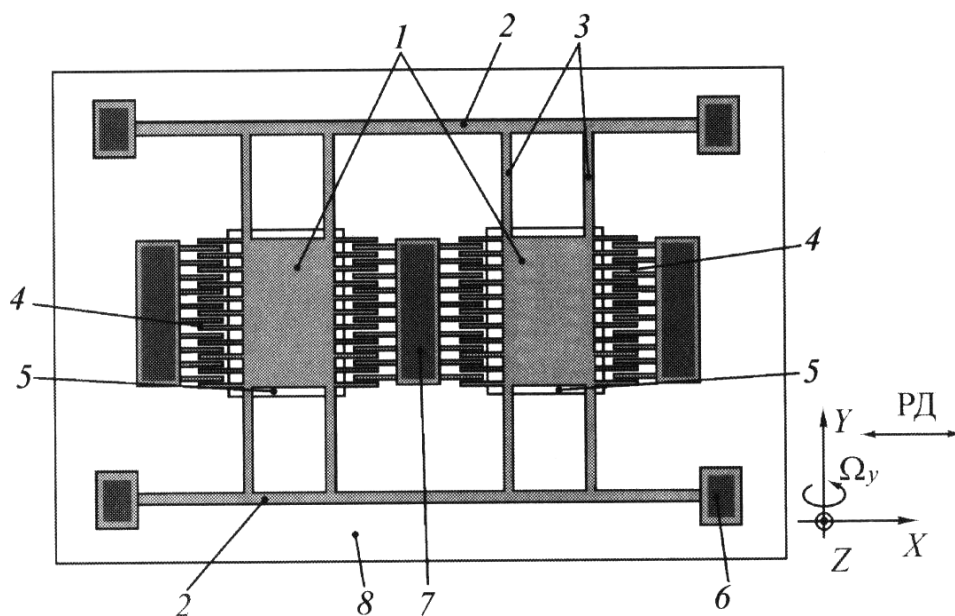


Рис. 9.7. Принципиальные схемы ММГ фирмы The Charles Stark Draper Laboratory:

- 1 – инерционные массы; 2 – базовый элемент конструкции подвеса;
- 3 – упругие элементы подвеса; 4 – электростатические гребенчатые приводы; 5 – электроды измерителей перемещений;
- 6 – анкер; 8 – подложка (основание)

Микромеханический гироскоп имеет две ИМ 1, подвешенные на упругих элементах 3 относительно жестких, базовых элементов 2, которые с помощью анкеров 6 укреплены на некотором расстоянии от подложки (основания) 8. В режиме движения обе ИМ перемещаются в противофазе посредством электростатических приводов 4, 7 (центральный и два боковых) гребенчатой структуры вдоль оси  $X$ . При появлении угловой скорости  $\Omega_y$  вокруг оси  $Y$  возникают силы инерции Кориолиса, которые вызывают противофазные перемещения ИМ вдоль оси  $Z$  с выходом из плоскости  $XU$ . Перемещения ИМ в РЧ могут быть измерены емкостными измерителями, неподвижные электроды 5 которых размещены на подложке, а подвижные сформированы на пластинах ИМ. Видоизмененная конструкция микромеханического гироскопа имеет несколько иную конфигурацию подвеса, и его схема приведена на рисунке 9.8. На этом рисунке мгновенные направления векторов сил инерции Кориолиса  $F_1$  и  $F_2$  соответствуют направлению вектора  $\Omega_y$  в положительном направлении оси  $Y$  и мгновенным направлениям скоростей  $v$  ИМ. На подложке–основании могут быть

расположены электроды для реализации силовой обратной связи в режиме компенсационного измерения.

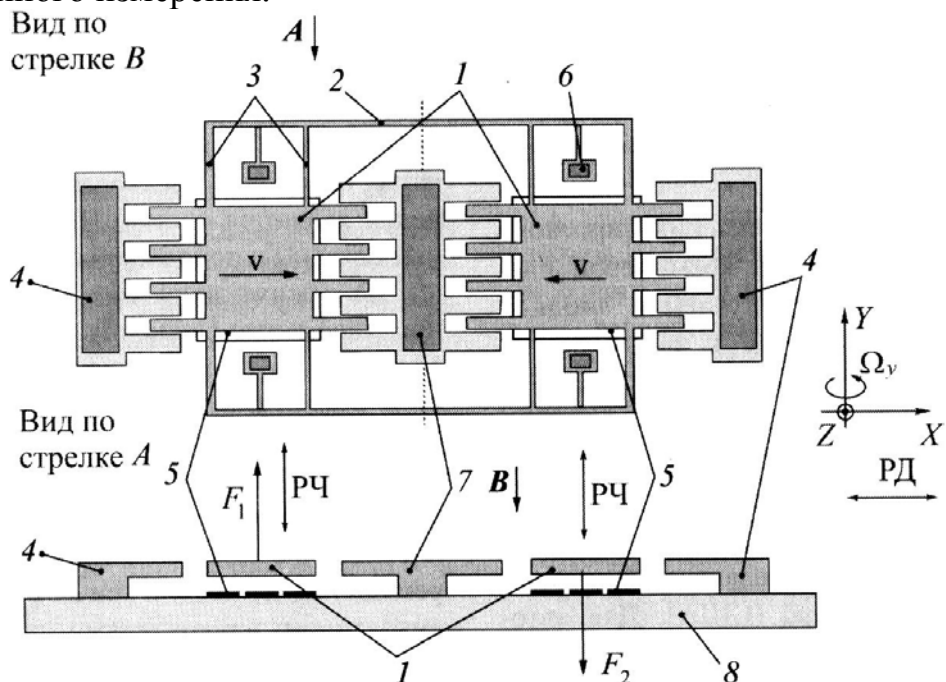


Рис. 9.8. Видоизмененные принципиальные схемы ММГ фирмы The Charles Stark Draper Laboratory (обозначения см. на рис. 9.7)

В простейшем случае при условии равенства ИМ  $m_1 = m_2 = m$ , полной синхронности противофазных движений в РД и полной симметрии упругих свойств подвеса движение каждой ИМ может быть описано системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + k_{ox}\dot{x} + c_x x &= F_a \sin \omega t; \\ m\ddot{z} + k_{oz}\dot{z} + c_z z &= -2m\Omega_y \dot{x}, \end{aligned} \right\}$$

где координата  $x$  соответствует РД, а координата  $z$  – РЧ.

Наличие двух ИМ, выходящих из плоскости и движущихся в противофазе, позволяет выполнить простые операции выделения сигналов. Пусть, например, в направлении оси  $Z$  действует ускорение  $a_z$ . Тогда на инерционные массы действуют силы  $m(a_z + 2v\Omega_y)$  и  $m(a_z - 2v\Omega_y)$ . Если выходные сигналы, пропорциональные действующим силам, вычитаются одно из другого, тогда устраняется действие  $a_z$ , а если эти сигналы суммируются, то на выходе формируется сигнал, пропорциональный ускорению  $a_z$ .

### 9.4.3. Микромеханические гироскопы RR-типа [25]

В микромеханических гироскопах RR-типа движение инерционной массы в РД РЧ носит вращательный характер. Сочетание относительного, вращательного движения инерционной массы в РД и ее переносного, вращательного движения в РЧ приводит к возникновению момента сил инерции Кориолиса, который носит название **гироскопический момент**.

В микромеханических гироскопах RR-типа реализуется колебательное движение инерционной массы (ротора) в режимах первичных и вторичных колебаний. На рис. 9.9 ротор 1 укреплен относительно опоры–основания 3 на упругих элементах 2 подвеса, которые имеют малые жесткости на кручение вокруг оси  $Y$  и на изгиб вокруг оси  $Z$ . Жесткость упругих элементов вокруг оси  $X$  значительно больше. Таким образом, возможны колебания ротора вокруг осей  $Z$  и  $Y$ .

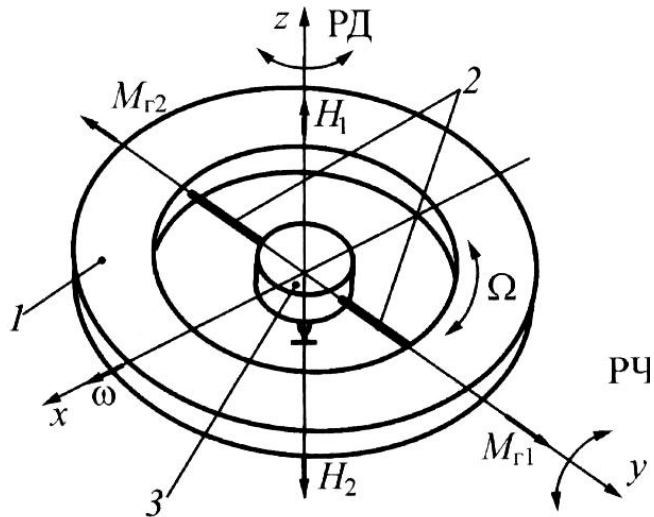


Рис. 9.9. Режимы работы ММГ RR-типа:  
1 – ротор; 2 – упругие элементы подвеса;  
3 – опора (основание)

Привод обеспечивает колебательные движения ротора со скоростью  $\dot{\gamma} = \Omega$  вокруг оси  $Z$  таким образом, что первую половину периода кинетический момент  $H_1$  направлен в положительную сторону оси  $Z$ , а вторую половину  $H_2$  – в отрицательную. Достаточно точно соблюдается равенство  $H_1 = H_2 = H = J_\gamma \Omega_\gamma$  ( $J_\gamma$  – осевой момент инерции ротора). Это режим первичных колебаний, т.е. РД. При появлении переносной скорости основания возникают гироскопические моменты  $M_{Г1}$  и  $M_{Г2}$ , – соответственно для первого и второго полупериодов РД ( $M_{Г1} = M_{Г2} = H\omega$ ). Периодически меняющий направление гироскопический момент вызывает колебания ротора вокруг оси  $y$ . Это режим вторичных колебаний, т.е. РЧ.

Простейшие уравнения движения ротора имеют вид

$$\left. \begin{aligned} J_\gamma \ddot{\gamma} + k_{\partial\gamma} \dot{\gamma} + c_\gamma x &= M_a \sin pt; \\ J_\alpha \ddot{\alpha} + k_{\partial\alpha} \dot{\alpha} + c_\alpha z &= H\omega, \end{aligned} \right\}$$

где  $J_\gamma$ ,  $J_\alpha$  – осевой и экваториальный моменты инерции ротора;  $k_{\partial\gamma}$ ,  $k_{\partial\alpha}$  – коэффициенты демпфирования ротора в РД и РЧ;  $c_\gamma$ ,  $c_\alpha$  – жесткости упругих элементов подвеса вокруг осей  $Z$  и  $Y$  соответственно;  $\gamma$ ,  $\alpha$  – углы колебаний ротора в РД и РЧ.

Угол  $\alpha$  содержит информацию об угловой скорости вращения основания, на котором находится гироскоп.



Принципиальная схема ЧЭ в МГ RR-типа приведена на рисунке 9.10. Инерционная масса 1 (ротор) относительно анкеров 3, установленных на подложке, имеет подвес, включающий в себя упругие элементы 2, 5 и промежуточный, жесткий элемент 4. ИМ 1 может быть кольцевой формы, а также конфигурации с разнесением масс для увеличения инерционности ротора. Упругие элементы 2 отличаются малой жесткостью на кручение и обеспечивают колебания ротора относительно выходных (измерительных) осей в РЧ. Упругие элементы 5 характеризуются малой изгибной жесткостью в плоскости первичных колебаний ротора и осуществляют режим движения. Элементы 5, показанные в виде прямолинейных стержней, могут иметь более сложную форму, а также иное угловое расположение относительно входной (чувствительной) и выходной (измерительной) осей. В любом случае размещение элементов 5 в плоскости ротора должно гарантировать минимальные жесткости относительно выходных осей.

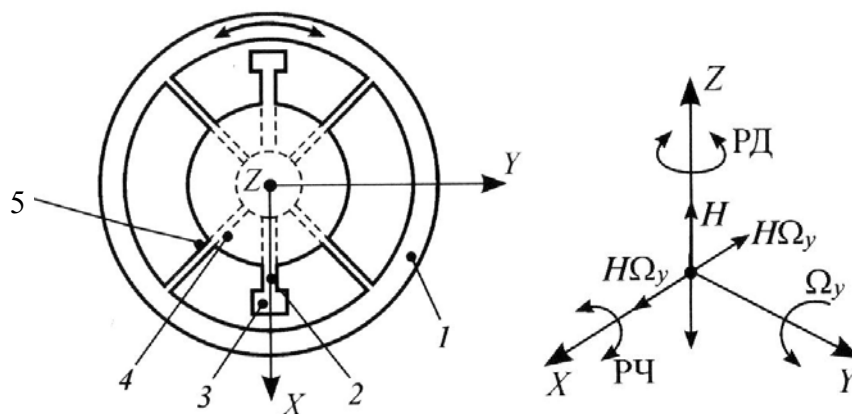


Рис. 9.10. Принципиальная схема ЧЭ ММГ RR-типа:  
 1 – ротор; 2, 5 – упругие элементы подвеса; 3 – анкер;  
 4 – промежуточный (кинематический) элемент подвеса

Передача вращающего момента привода осуществляется непосредственно на ротор. Элементы статора привода располагаются, как правило, снаружи ротора. Промежуточный элемент 4 имеет размеры, зависящие от элементов, находящихся на нем, а также от размеров упругих элементов 5. На рисунке 9.10, пунктиром показано возможное изменение размеров элементов 2, 4, 5.

Принципиальная схема ММГ (производитель – фирма The Charles Stark Draper Laboratory), ЧЭ которой соответствует схеме на рисунке 9.10, приведена на рис. 9.11. Ротор 1 с массивными участками, разнесенными вдоль оси X, с помощью упругих элементов 5 подвеса, растяжек–торсионов 2, промежуточного кинематического (опорного) элемента 4 и анкеров 3 смонтирован на подложке. Электростатический привод, гребенчатые структуры ротора которого составляют единое целое с ИМ 1, а статорные структуры 6, 8 размещены на подложке, обеспечивает колебательный РД вокруг оси Z. При появлении переносной угловой скорости  $\Omega_x$  основания переменный гироскопический момент вызывает

вторичные колебания ротора (РЧ) вокруг оси  $Y$ . Электроды 9, размещенные на подложке, и электроды, сформированные напротив, на роторе, образуют емкостные измерители перемещений.

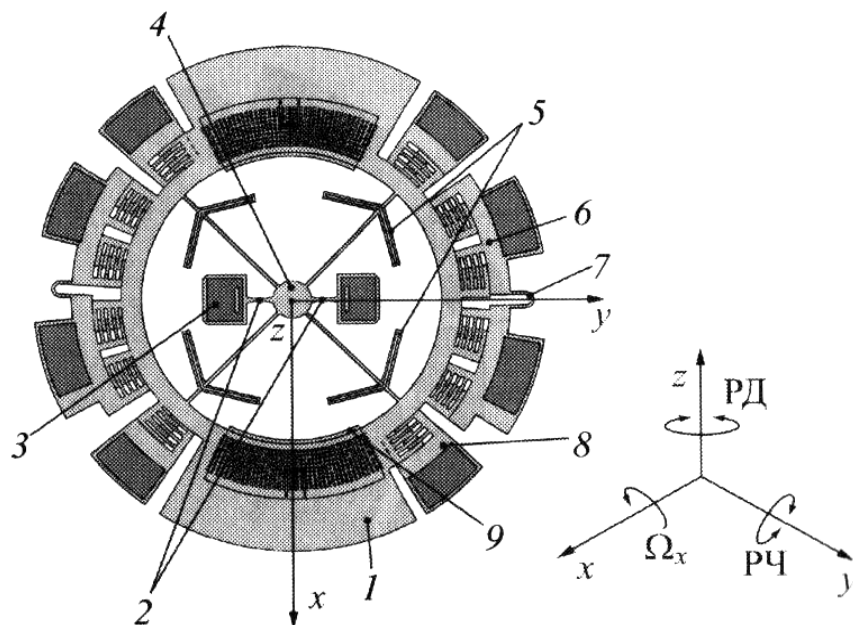


Рис. 9.10. Принципиальные схемы ММГ фирмы The Charles Stark Draper Laboratory:

- 1 – инерционная масса (ротор); 2 – упругие элементы–растяжки подвеса; 3 – анкер; 4 – кинематический элемент подвеса;
- 5 – упругие элементы подвеса с петлевыми образованиями;
- 6, 8 – статоры электростатического привода; 7 – петля–компенсатор;
- 9 – электрод емкостного измерителя перемещений

Конструкция имеет особенности. Прежде всего, следует обратить внимание на петлевые образования (длина петли около 200 мкм при ширине 20 мкм) упругих элементов 5, которые служат для того, чтобы уменьшить растягивающую силу в упругих элементах при колебаниях ротора, так как растяжение упругих элементов вызывает нелинейную зависимость между амплитудой колебаний ротора и их жесткостью. Далее, следует обратить внимание на продольные пустоты в анкерах, которые, по сути, сформировали миниатюрные упругие элементы в местах соединения торсионов 2 и анкеров 3. При возможном и неизбежном напряжении в материале и, особенно в местах соединения разнородных материалов упругость в местах соединения торсионов 2 и анкеров 3 должна создать более комфортные условия работы торсионов. Из-за необходимости присадки бора в кремний, из которого выполнены ЧЭ (технологическая необходимость), в материале также может возникнуть дополнительное напряжение. Такая ситуация характерна для статоров 6, которые состоят из двух половин, разъединенных петель 7, играющей роль компенсатора напряжения. В реализованной микроструктуре диаметр (максимальный) ротора около 1 мм. Электроды выполнены в виде тонкопленочной металлизации на подложке из стекла. Подробнее ознакомиться с теорией и технологией изготовления микромеханических гироскопов можно в учебном пособии [25].



## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. На каком физическом принципе работают осцилляторные вибрационные гироскопы?
2. Принцип работы камертонного гироскопа.
3. Классификация ММГ по способу реализации движения по координате возбуждения и по координате выходного сигнала.
4. Отличительные признаки ММГ.
5. Принципиальная схема чувствительного элемента ММГ LL-типа.
6. Принцип работы ММГ LL-типа.
7. Принципиальная схема чувствительного элемента ММГ RR-типа.
8. Принцип работы ММГ RR-типа.

## 10. ВОЛНОВЫЕ ТВЕРДОТЕЛЬНЫЕ ГИРОСКОПЫ [15]

Высокие требования, предъявляемые к чувствительным элементам систем ориентации, навигации и управления подвижными объектами, привели к созданию нетрадиционных гироскопических приборов, построенных на новых физических принципах. К такого рода приборам относится волновой твердотельный гироскоп (ВТГ), работа которого основана на использовании инертных свойств стоячих волн, возбужденных во вращающихся осесимметричных оболочках. Преимуществами ВТГ являются:

- высокая точность;
- малое потребление мощности;
- конструктивная простота механических узлов;
- устойчивость к прерыванию подачи электропитания;
- малое время готовности;
- широкий диапазон рабочих температур;
- устойчивость к воздействию ионизирующего излучения;
- малая чувствительность к линейным перегрузкам;
- большой срок службы;
- возможность применения автоматизированного производства при изготовлении ВТГ.

### 10.1. Принцип работы гироскопа с полусферическим резонатором

Допустим, что в резонаторе возбуждены колебания, имеющие форму стоячей волны, пучности которой находятся в точках  $A, B, C, D$  (рис. 10.1, а)).

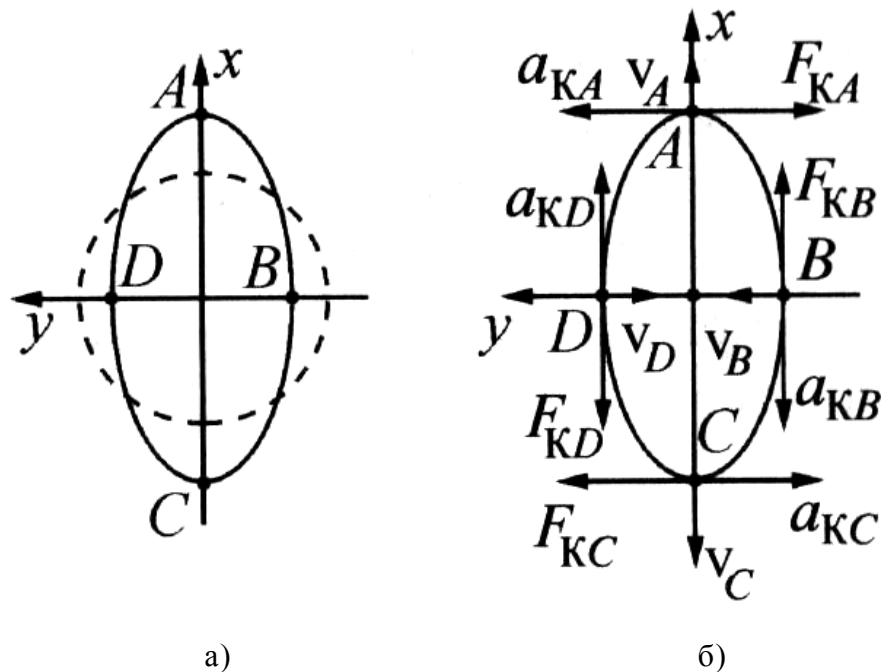


Рис. 10.1. Механизм образования прецессии стоячей волны:  
а) неврещающий резонатор ( $\Omega = 0$ );  
б) вращающийся резонатор ( $\Omega \neq 0$ )

При вращении полусферы вокруг оси симметрии с угловой скоростью  $\Omega$  точки  $A, B, C, D$  совершают сложное движение: относительное – со скоростями  $V_A, V_B, V_C, V_D$  и переносное – с угловой скоростью  $\Omega$ . Появившееся кориолисово ускорение элементов массы в точках  $A, B, C, D$  обозначим  $a_{KA}, a_{KB}, a_{KC}, a_{KD}$  соответственно. Кориолисовы силы инерции  $F_{KA}, F_{KB}, F_{KC}, F_{KD}$  приложенные в точках  $A, C$  и  $B, D$ , направлены в противоположные стороны и создают пары сил. Пары  $F_{KA} - F_{KC}$  и  $F_{KB} - F_{KD}$  (рис. 10.1, б)) противоположны по направлению и в сумме дают равнодействующую пару кориолисовых сил инерции, модуль которой пропорционален значению угловой скорости вращения основания. Эта пара сил вызывает вращение (прецессию) волнового поля (стоячей волны) относительно резонатора и в инерциальном пространстве. Определяя положение стоячей волны относительно корпуса прибора, можно получить информацию об угле поворота основания ВТГ в инерциальном пространстве.

Для угла  $\mathcal{G}(t)$ , определяющего ориентацию волновой картины колебаний резонатора на основной форме относительно основания, имеет место следующее соотношение:

$$\mathcal{G}(t) = -K \int_0^t \Omega(\tau) d\tau = -k\Delta\psi,$$

где  $\Omega(t)$  – входная угловая скорость;  $K$  – масштабный коэффициент ВТГ;  $\Delta\psi$  – угол поворота основания.

Аналогичное соотношение имеет место между входной угловой скоростью и углом ориентации волнового поля относительно инерциального пространства:

$$\mathcal{G}_*(t) = k \int_0^t \Omega(\tau) d\tau,$$

где  $k = 1 - K$ .

На рисунке 10.2 показаны наиболее важные собственные формы колебаний резонатора. Нулевая форма ( $n = 0$ ) соответствует колебаниям растяжения–сжатия, она не учитывается при исследовании динамики ВТГ, поскольку деформации растяжения резонатора малы по сравнению с деформациями изгиба.

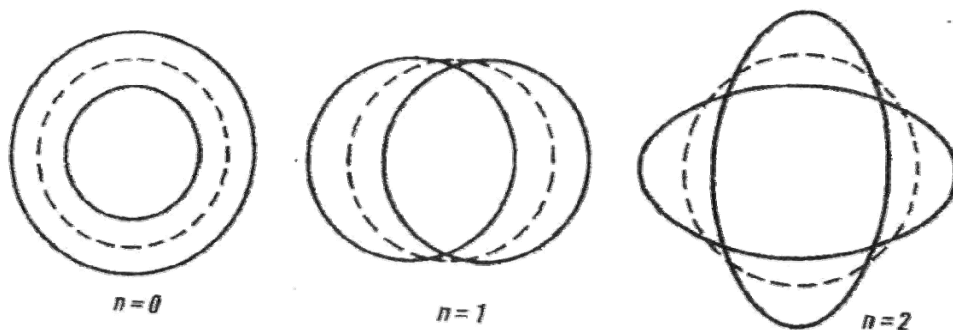


Рис. 10.2. Собственные формы колебаний резонатора

Первая форма ( $n = 1$ ) соответствует перемещению резонатора как твердого тела, ее необходимо учитывать при решении уравнений движения ВТГ, так как

эта форма возбуждается вследствие деформации ножки резонатора. Вторая форма ( $n = 2$ ) используется в качестве рабочей, она является наименьшей собственной формой изгибных колебаний полусферического резонатора.

На рисунке 10.3 показана конструкция волнового твердотельного гироскопа разработки Раменского приборостроительного конструкторского бюро. ВТГ представляет собой прибор, состоящий из полусферического резонатора 7, внутреннего 3 и наружного 6 корпусов с расположенными на них системами электродов съема информации и возбуждения, основания с вакуумной колодкой и установленными в ней коаксиальными 10 и одинарными 2 гермовводами, кожуха 9 с ниппелем и встроенного нераспыляемого геттерного насоса 1 для поддержания глубокого вакуума внутри прибора в процессе эксплуатации. Полусферический резонатор 7 является чувствительным элементом прибора. Сквозная ножка выполнена как единое целое с полусферой. Материал резонатора и корпусов (плавленное кварцевое стекло) выбран из условия максимальной добротности и технологических требований к сопрягаемым узлам. Наружная и внутренняя поверхности резонатора металлизированы. Ножка предназначена для передачи электрического контакта на полусферу, выставки и крепления резонатора в корпусах посредством пайки.

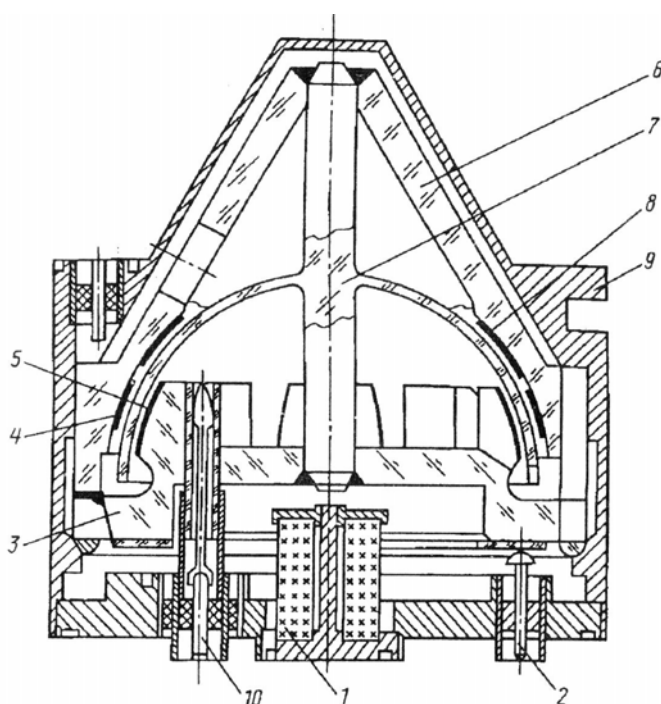


Рис. 10.3. ВТГ разработки АО РПКБ:  
 1 – встроенный насос; 2 – гермоввод;  
 3 – внутренний корпус; 4 – электрод возбуждения;  
 5 – датчик перемещения; 6 – наружный корпус;  
 7 – резонатор; 8 – кольцевой электрод;  
 9 – кожух; 10 – коаксиальный гермоввод

На наружном корпусе 6 имеются 16 отдельных электродов возбуждения и кольцевой электрод возбуждения, предназначенные для возбуждения и

поддержания колебаний резонатора в рабочем режиме; на внутреннем корпусе 3 – восемь электродов системы съема информации, формирующие два измерительных канала, расположенных по отношению друг к другу под углом  $45^\circ$ .

Электроды выполнены напылением на сферическую поверхность металлической пленки соответствующей конфигурации. Рабочие зазоры между резонатором и корпусами 3 и 6 составляют сотни микрометров. Электрический монтаж внутри прибора осуществляется посредством многослойной печатной платы. Кожух 9 с ниппелем служат для создания сверхвысокого вакуума ( $\sim(1,33 \dots 0,133) 10^{-6}$  Па) в полости прибора в процессе вакуумирования и герметизации прибора.

## 10.2. Кольцевая модель резонатора ВТГ

В этом параграфе рассмотрена кольцевая модель [11, 15] резонатора ВТГ, которая применяется наряду с полусферической. Кольцевая модель – это тонкое упругое кольцо, совершающее колебательное движение в своей плоскости (рис.10.4).

Уравнение движения такого кольца под действием внешней распределенной нагрузки имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\Omega\dot{w}' + \chi^2(w'''' + 2w'''' + w'') + \\ + \chi^2\xi(\dot{w}'''' + 2\dot{w}'''' + \dot{w}'') = (p_w'' - p_v')/(\rho S), \end{aligned} \quad (10.1)$$

где  $\chi^2 = EI/(\rho SR^4)$ ;  $\rho$  – плотность материала кольца;  $S$  – площадь поперечного сечения кольца;  $I$  – момент инерции площадь поперечного относительно оси изгиба;  $R$  – радиус недеформированного кольца;  $w(\varphi, t)$  – нормальное перемещение точки кольца в произвольный момент времени;  $p_w, p_v$  – проекции внешней распределенной нагрузки на нормаль и касательную к недеформированному кольцу соответственно;  $\xi$  – коэффициент, характеризующий время затухания свободных колебаний.

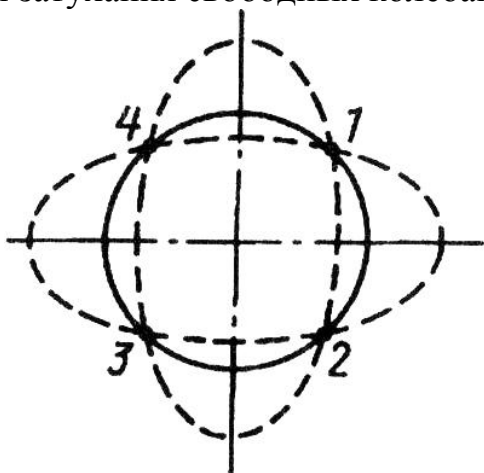


Рис. 10.4. Движение кольцевого резонатора:  
1 – 4 – узловые точки

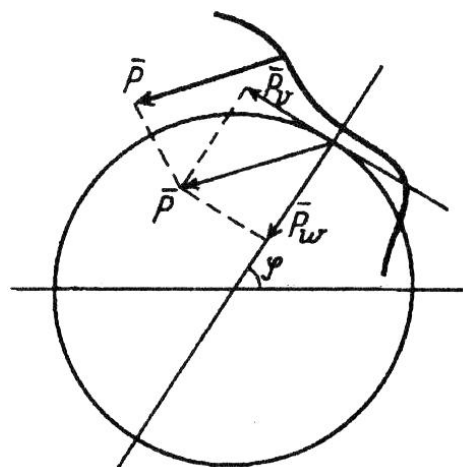


Рис. 10.5. Силовые фактора резонатора



В уравнении (10.1) точка обозначает производную по времени  $t$ , штрих – производную по углу  $\varphi$ . Уравнение (10.1) отражает основное свойство стоячей волны, возбужденной в резонаторе ВТГ, – прецессию волнового поля при вращении кольца с угловой скоростью  $\Omega$ , в своей плоскости в случае, когда  $\xi = 0$ ,  $p_w = p_v = 0$ , т.е. в случае идеального свободного кольца.

Решение уравнения (10.1) представим в виде

$$w(\varphi, t) = p(t) \cos 2\varphi + q(t) \sin 2\varphi. \quad (10.2)$$

Подставляя выражение (10.2) в уравнение (10.1) и применяя метод Бубнова–Галеркина, приходим к системе

$$\begin{aligned} \ddot{p}(t) - \frac{8}{5}\Omega\dot{q}(t) + \frac{36\chi^2}{5}p(t) &= 0; \\ \ddot{q}(t) + \frac{8}{5}\Omega\dot{p}(t) + \frac{36\chi^2}{5}q(t) &= 0. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Из системы уравнений (10.3) следует [11, 15], что скорость прецессии основной формы колебаний кольцевого резонатора определяется выражением  $\dot{\varphi} = -0,4\Omega$ .

Для основной формы колебаний  $n = 2$  значение масштабного коэффициента кольцевого резонатора  $K = 0,4$ . Значение масштабного коэффициента полусферического резонатора  $K = 0,312$  [11].

#### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. На каком физическом принципе работает волновой твердотельный гироскоп?
2. Объяснить механизм образования прецессии стоячей волны.
3. Какие преимущества имеет волновой твердотельный гироскоп по сравнению с гироскопом в кардановом подвесе?
4. Какая форма колебаний резонатора используется в качестве рабочей и почему?
5. С какой целью в полости прибора создается сверхвысокий вакуум?

## 11. ОПТИЧЕСКИЕ КВАНТОВЫЕ ГИРОСКОПЫ

Оптические квантовые гироскопы представляют собой класс приборов, которые можно назвать «циркуляционными» гироскопами [19]. Такое название возникло в связи с тем, что для подобных устройств характерным является движение потоков квантов (фотонов) по замкнутому кольцу.

В общем случае в состав гироскопа входят: источник фотонов (источник излучения), система элементов, обеспечивающая встречное движение по замкнутому контуру двух потоков фотонов и устройства регистрации последствий вращения основания гироскопа в плоскости замкнутого контура вокруг входной оси, перпендикулярной этой плоскости. Взаимное расположение источников фотонов и контура циркуляционного гироскопа приведено на рисунке 11.1.

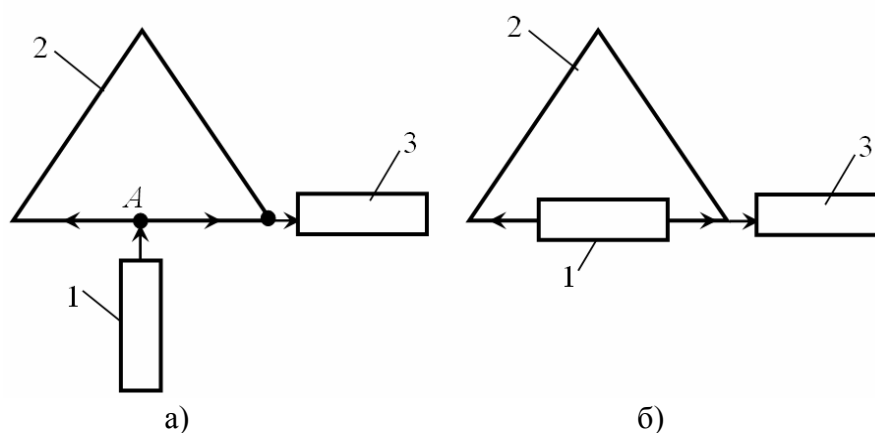


Рис. 11.1. Схемы оптических квантовых гироскопов:

а) – гироскоп с источником излучения, расположенным вне контура;

б) – гироскоп с источником излучения, расположенным на отрезке замкнутого контура;

1 – источник излучения;

2 – контур, по которому циркулируют противоположные волны;

3 – регистрирующее устройство

В первой схеме (см. рис. 11.1, а)) показателем входной угловой скорости является фазовый сдвиг противоположно распространяющихся лучей. Во второй схеме (см. рис. 11.1, б)) входная угловая скорость регистрируется по сдвигу частот встречно циркулирующих лучей.

В начале XX столетия физики разных стран, изучая проблему «эфира» провели ряд экспериментов со световым лучом, используя установки, которые впоследствии послужили основой для создания современных оптических гироскопов. В 1904 году американский физик А. Майкельсон высказал идею постановки опытов, проверяющих гипотезу «эфира». В 1913 году французский физик М. Саньяк провел эти опыты и при помощи своей установки доказал, что вращательное движение измерительной установки не влечет за собой движение «эфира» – этой светонесущей среды. Попутно М. Саньяк открыл «вихревой оптический эффект» (способность установки подобного типа обнаруживать

угловую скорость вращения) и выразил надежду, что это явление может найти практическое применение для регистрации медленных вращательных движений.

Схема установки приведена на рисунке 11.2. На круглом основании 1 диаметром 50 см, приводимом в движение электродвигателем 2, закреплены зеркала 3, интерферометр с тонким воздушным слоем 4, источник света 5 (лампа накаливания).

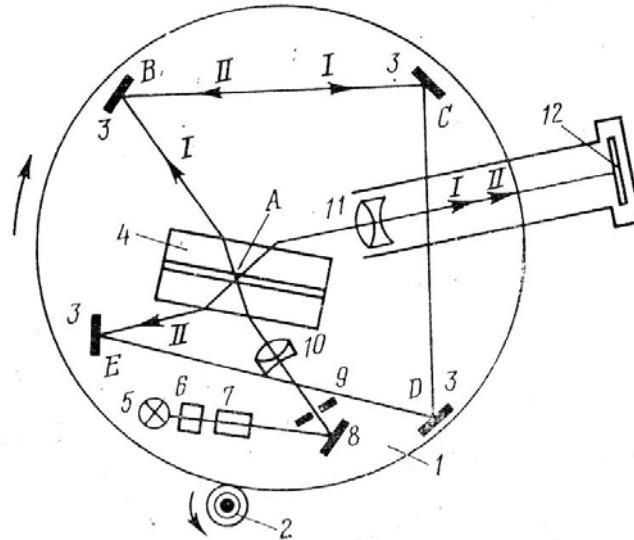


Рис. 11.2. Схемы установки Саньяка

Прежде, чем попасть на зеркала, луч от лампы накаливания формировался в узкий поляризованный луч, пройдя объектив 6, призму Николя 7, отразившись от зеркала 8, пройдя щель диафрагмы 9 и объектив 10. На интерферометре 4 луч разделяется на проходящий I и отраженный II. Затем, отразившись от зеркал, лучи I и II вновь встречались в интерферометре и шли в одном направлении через линзу 11 на фотопластинку 12. При вращении основания на фотопластинке возникали интерференционные полосы.

В 1925 году А. Майкельсон и Х. Гейль проделали замечательный опыт, использовав вращение Земли. На рисунке 11.3 изображена схема установки.

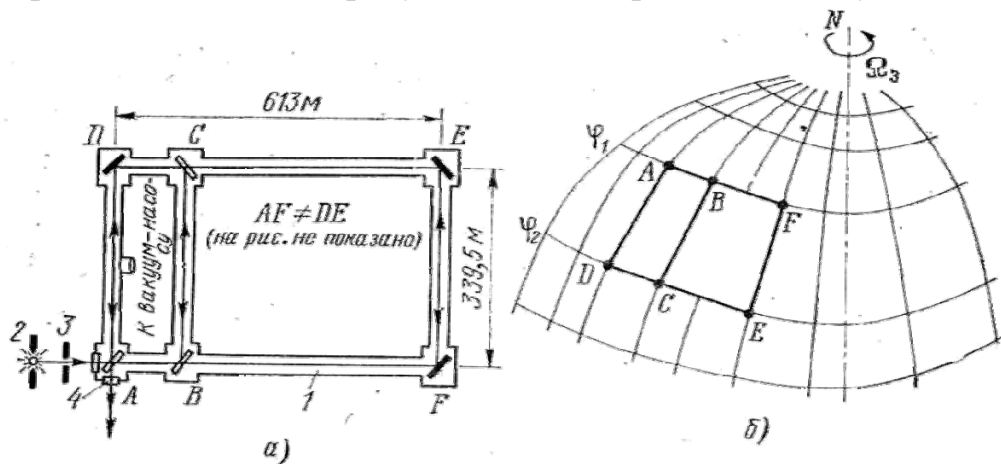


Рис. 11.3. Схемы установки Майкельсона – Гейля:  
 а) размеры и размещение элементов установки;  
 б) расположение установки относительно Земли

Трубы диаметром 30 см были уложены по приведенной схеме. Для уменьшения влияния изменений температуры и давления воздух из труб откачивался до 1333 Па (10 мм рт.ст.). Пучок света от вольтовой дуги 2 проходил диафрагму 3, входил в систему труб через окно 4 и на зеркале  $A$  раздваивался, образуя встречно распространяющиеся лучи. После обхода одного из контуров оба луча направлялись в телескоп, где наблюдались интерференционные полосы.

Этот опыт Зоммерфельд считал «прекрасной аналогией опыта Фуко с маятником, ибо в то время как поступательное движение Земли не может быть доказано ни механически, ни оптически, вращение Земли может быть измерено как механически по Фуко, так и оптически Майкельсону—Гэйлю».

В 1962 году, обсуждая возможные принципы действия преобразователей ориентировки и угловой скорости, советские ученые Б.И. Филиппович и Д.Я. Либерсон указали, что для использования установки типа интерферометра Саньяка в качестве датчика угловой скорости с размерами контура, приведенными к приемлемым значениям, нужно использовать более чувствительные способы обнаружения разности хода лучей, чем применявшиеся ранее, а также использовать многократный обход лучами контура. Поскольку при увеличении длины хода лучей неизбежно увеличение потерь света на отражение, было высказано предположение о возможности преодоления этих трудностей путем использования в качестве источников света оптических квантовых генераторов. Так практически впервые была предложена схема оптического квантового гироскопа.

### 11.1. Лазерный гироскоп

Строгий анализ явлений в замкнутом контуре, в котором распространяются навстречу друг другу две электромагнитные волны, возможен в рамках теории относительности, однако предварительные соотношения, поясняющие принцип действия таких приборов, могут быть получены и в приближении классической теории [14]. Покажем это на примере анализа замкнутого контура, по периметру которого распространяются во встречных направлениях две электромагнитные волны 1, 2, показанные стрелками на рисунке 11.4.

Выделим на контуре произвольный отрезок  $AB$  длиной  $dL$ , который виден из точки  $O$  под углом  $d\theta$ . Если контур неподвижен, то время обхода его периметра встречными волнами 1 и 2 оказывается одинаковым и равным  $t = L/c$ . При вращении контура с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг точки  $O$  кажущееся расстояние между точками  $A$  и  $B$  для встречно бегущих волн изменяется. Действительно, для волны, бегущей из точки  $B$  в точку  $A$  за время  $dt = L/c$  точка  $A$  успевает переместиться на угол

$$d\varphi = \Omega dL / c. \quad (11.1)$$

В результате этого длина отрезка  $BA'$ , как видно из треугольника  $A'AB$ , становится равной

$$BA' = dL + rd\varphi \cos \beta, \quad (11.2)$$

где  $\beta$  – угол между касательной к контуру и направлением тангенциальной скорости  $\Omega r$ .

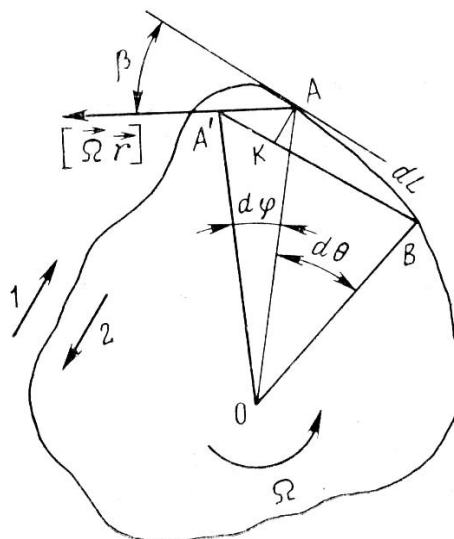


Рис. 11.4. Траектория светового луча во вращающемся контуре

С другой стороны, из рисунка 11.4 можно получить

$$dL = rd\theta / \cos \beta. \quad (11.3)$$

Используя (11.1) и (11.2), находим

$$BA' = rd\theta / \cos \beta + r^2\Omega d\theta / c. \quad (11.4)$$

Для встречно бегущей волны от  $A$  к  $B$  будет иметь место кажущееся сокращение расстояния, которое по аналогии с (11.4) составит

$$AB' = rd\theta / \cos \beta - r^2\Omega d\theta / c.$$

Таким образом, на участке  $dL$  встречно бегущие волны приобретают дифференциальную разность хода, величина которой будет

$$BA' - AB' = 2r^2\Omega d\theta / c.$$

При обходе всего периметра контура дифференциальная разность хода составит

$$dl = \frac{2}{c} \oint r^2 \Omega d\theta = \frac{4\Omega S}{c}, \quad (11.5)$$

где  $S$  – площадь контура.

Изменение длины периметра при вращении замкнутого контура приведет к относительному запаздыванию встречных волн на величину

$$\tau = \frac{\Delta l}{c} = \frac{4S}{c^2} \Omega. \quad (11.6)$$

Если этот временной сдвиг выразить через разность фаз встречных волн, которая возникает при вращении, то она составит

$$\Delta \varphi = \omega \tau = \frac{4S\omega}{c^2} \Omega. \quad (11.7)$$

Если замкнутый контур, изображенный на рисунке 11.1, представляет собой резонатор, то изменение его периметра при вращении приведет к изменению частот настройки резонатора для встречных волн. Разность этих частот может быть найдена на основании соотношений (11.5) или (11.6) в виде

$$\Delta\omega = \frac{8\pi\Omega S\omega}{\lambda L}, \quad (11.8)$$

где  $\lambda$  – средняя длина волны, определяемая как  $\lambda \approx 4\pi c / (\omega_1 + \omega_2)$ . Здесь через  $\omega_1$  и  $\omega_2$  обозначены частоты настройки вращающегося кольцевого резонатора для волн 1 и 2. При этом частота собственных колебаний кольцевого резонатора для волны, распространяющейся по направлению вращения контура, уменьшается, а для встречной волны увеличивается.

Для измерения скорости вращения с помощью двух встречно бегущих по замкнутому контуру электромагнитных колебаний должна быть установлена определенная функциональная зависимость между вектором угловой скорости и информационными параметрами электромагнитных волн. Вектор угловой скорости в общем случае может быть функционально связан с амплитудой, частотой, фазой или временем распространения каждой электромагнитной волны.

Измерение того или иного параметра поля при известном характере зависимости этого параметра от угловой скорости вращения дает возможность определить величину последней. Поэтому параметр электромагнитного поля, положенный в основу измерения, определяет тип измерительного устройства или системы. Таким образом, датчики угловой скорости с использованием кольцевых резонаторов можно разделить на четыре основных типа: временные, фазовые, амплитудные и частотные. Для каждого типа датчика характерны и определенные типы индикаторов: для временных устройств это будут измерители запаздывания (часы), для фазовых устройств – фазометры, для амплитудных – приборы, измеряющие интенсивность сигнала, наконец, для частотных устройств – частотомеры. Следовательно, тип преобразователя информации об угловой скорости легко определить по типу используемого индикатора.

**Временные датчики.** Временными датчиками называются устройства, основанные на использовании зависимости времени распространения встречно бегущих волн кольцевого резонатора от угловой скорости вращения его вокруг оси чувствительности.

Согласно выражению (11.6) величина относительного запаздывания встречных волн даже при сравнительно высоких скоростях вращения оказывается, весьма незначительной. Так, например, при регистрации угловой скорости  $\Omega = 1$  рад/с в контуре площадью  $S = 1$  м<sup>2</sup> время запаздывания встречных волн  $\tau$  составит менее  $10^{-16}$  с. Вполне естественно, что регистрация таких временных интервалов с высокой точностью представляет весьма серьезную проблему. Это обстоятельство не позволяет в настоящее время реализовать достаточно чувствительные временные датчики при реально приемлемых размерах кольцевого резонатора. Поэтому временные методы регистрации с

использованием кольцевых резонаторов представляют скорее теоретический, чем практический интерес.

**Фазовые датчики.** Фазовыми датчиками называются такие устройства, в которых используется зависимость фаз (или разности фаз) встречных волн кольцевого резонатора от угловой скорости его вращения.

Анализ выражения (11.7) показывает, что при прочих равных условиях разность фаз встречных волн увеличивается с ростом частоты электромагнитных колебаний. Поэтому переход к оптическим частотам порядка ( $10^{14} \dots 10^{16}$ ) Гц представляется вполне оправданным.

**Амплитудные датчики.** К амплитудным датчикам угловой скорости можно отнести устройства, основанные на использовании зависимости напряженности полей или интенсивности встречных волн кольцевого резонатора (или разности их интенсивностей) от угловой скорости вращения его вокруг оси чувствительности.

Возможность построения чувствительных амплитудных датчиков непосредственно не вытекает из рассмотрения собственных волн вращающегося кольцевого резонатора. Однако при возбуждении кольцевого резонатора внешним генератором вынужденные колебания вращающегося кольцевого интерферометра будут испытывать неодинаковое затухание при расстройке кольцевого резонатора, что приведет к изменению интенсивности встречных волн и может быть использовано для измерения угловой скорости вращения.

**Частотные датчики.** Частотными датчиками угловой скорости называются устройства, использующие зависимость частот колебаний встречно бегущих волн от угловой скорости вращения кольцевого резонатора вокруг оси чувствительности. Такого типа датчики являются активными системами. Генерация встречных волн в кольцевом резонаторе достигается компенсацией активных потерь, если ввести в резонатор инверсную усиливающую среду. В кольцевых квантовых генераторах информация об угловой скорости вращения выделяется, как правило, по разности частот встречных волн, величина которой может быть найдена по выражению (11.8).

Датчики угловой скорости с пассивными контурными резонаторами для своей работы требуют внешнего источника оптического излучения и ряда вспомогательных элементов. При этом стремление реализовать высокочастотный контурный резонатор приводит к необходимости использовать интерферометр с зеркалами, обладающими значениями коэффициента отражения, близкими к единице. В этом случае затрудняется введение энергии от внешнего источника в высокочастотный кольцевой резонатор. Эти противоречия в значительной степени удается разрешить в активных системах, какими являются **частотные датчики угловой скорости**, информативным параметром которых являются либо сами частоты колебаний встречных волн, либо разность их частот, регистрируемая на выходе автогенератора с кольцевым резонатором. Такой датчик получил название **лазерного гироскопа**.

Простейший лазерный гироскоп представляет собой кольцевой резонатор, частично или полностью заполненный активной средой 1 и 2, возбуждаемой,

например, высокочастотным разрядом, как это показано на рисунке 11.5. В замкнутом контуре кольцевого оптического квантового генератора возбуждаются встречные волны, частоты которых в первом приближении определяются соотношением (11.8).

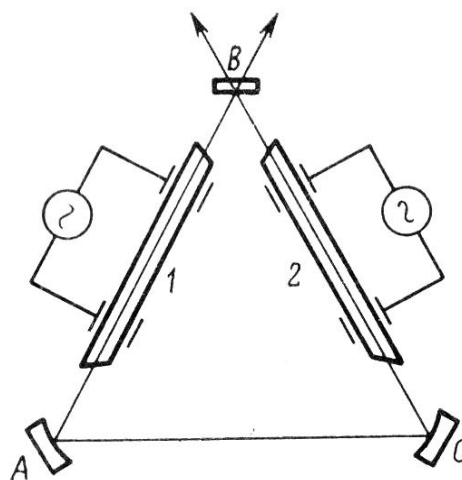


Рис. 11.5. Схема лазерного гироскопа с кольцевым резонатором

Часть энергии встречных волн выводится из резонатора квантового генератора через одно из зеркал и поступает на схему измерения разности частот. Чрезвычайно высокая монохроматичность когерентного оптического излучения, реализуемая в кольцевых оптических квантовых генераторах позволяет создать весьма чувствительный датчик угловой скорости и существенно уменьшить его размеры.

## 11.2. Волоконно-оптический гироскоп [30]

Волоконно-оптический гироскоп (ВОГ) – оптико-электронный прибор, создание которого стало возможным лишь с развитием и совершенствованием элементной базы квантовой электроники. Возможность создания реального высокочувствительного ВОГ появилась лишь с промышленной разработкой одномодового диэлектрического световода с малым затуханием.

Благодаря совершенствованию технологии производства выпускается волокно с очень низкими потерями. Чтобы не повредить волокно, намотка производится на катушку радиусом несколько сантиметров. При этом не наблюдается сколько-нибудь заметного увеличения потерь. Можно создать сравнительно малогабаритный и высокочувствительный интерферометр Саньяка с катушкой небольшого радиуса (2...5 см), намотав на нее волокно большой длины.

Конструирование ВОГ на таких световодах определяет уникальные свойства прибора. К этим свойствам относятся:

- потенциально высокая чувствительность (точность);
- малые габариты и масса конструкции;
- невысокая стоимость производства и конструирования при массовом изготовлении;



- ничтожное потребление энергии, что имеет немаловажное значение при использовании ВОГ на борту;
- большой динамический диапазон измеряемых угловых скоростей;
- практически мгновенную готовность к работе;
- нечувствительность к линейным перегрузкам.

На рисунке 11.6 приведена оптическая схема волоконно-оптического гироскопа. По сути это интерферометр Саньяка, в котором круговой оптический контур заменен на катушку из длинного одномодового оптического волокна. Часть схемы, обведенная штриховой линией, необходима для повышения стабильности нулевой точки. Таким образом, разность фаз между двумя световыми волнами, обусловленная эффектом Саньяка, с учетом формулы (11.7) выражается как

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi Lr}{c\lambda} \Omega, \quad (11.9)$$

где  $L$  – длина волокна;  $r$  – радиус катушки.

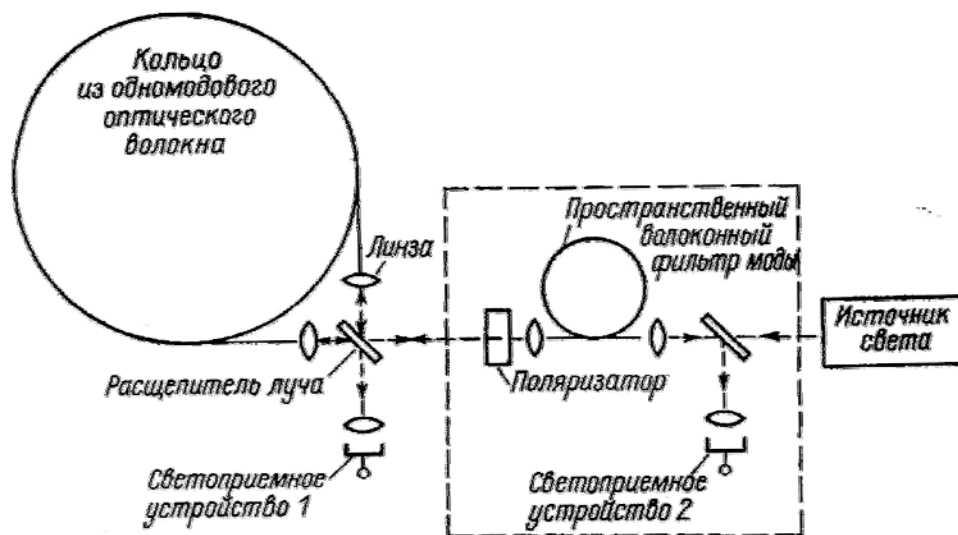


Рис. 11.6. Схема волоконно-оптического гироскопа

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. На что влияет взаимное расположение источников фотонов и замкнутого контура оптического гироскопа?
2. Какие датчики могут использоваться для съема информации об угловом движении основания с помощью оптического гироскопа?
3. В чем заключается идея А. Майкельсона, реализованная Саньяком?
4. Пояснить принцип действия лазерного гироскопа.
5. Пояснить принцип действия волоконно-оптического гироскопа.
6. Какие преимущества имеют оптические гироскопы по сравнению с традиционными?

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абрамов, Р.А. Ошибки динамически настраиваемых гироскопов: монография / Р.А. Абрамов. – М.: Машиностроение, 1985. – 264 с.
2. Брозгуль, Л.И. Вибрационные гироскопы: монография / Л.И. Брозгуль, Е.Л. Смирнов. – М.: Машиностроение, 1970. – 216 с.
3. Брозгуль, Л.И. Динамически настраиваемые гироскопы: Модели погрешностей для систем навигации: монография / Л.И. Брозгуль. – М.: Машиностроение, 1989. – 232 с.
4. Брозгуль, Л.И. Вибрационные гироскопы / Л.И. Брозгуль, Е.Л. Смирнов // История механики гироскопических систем: сб. статей – М.: Наука, 1975. С. 40–43.
5. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: учебник / Н.В. Бутенин, Я.П. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2004. – 461 с.
6. Бороздин, В.Н. Гироскопические приборы и устройства систем управления: монография / В.Н. Бороздин. – М.: Машиностроение, 1990. – 272 с.
7. Власов, Ю.Б. Роторные вибрационные гироскопы в системах навигации: монография / Ю.Б. Власов, О.М. Филонов. – Л.: Судостроение, 1980. – 224 с.
8. Волынский, Б.А. Сферическая тригонометрия: монография / Б.А. Волынский. – М.: Наука, 1977. – 136 с.
9. Гироскопы. Производство и исследование: монография / под ред. Г.А. Сломянского. – М.: Машиностроение, 1969. – 187 с.
10. Динамически настраиваемые гироскопы: учебное пособие / Д.А. Кацай, В.Ю. Клюев, А.Н. Лысов; под ред. А.Н. Лысова. – Челябинск: Изд-во ЧПИ, 1983. – 75 с.
11. Журавлев, В.Ф. Волновой твердотельный гироскоп: монография / В.Ф. Журавлев, Д.М. Климов. – М.: Наука, 1985. – 126 с.
12. Климов, Д.М. Динамика гироскопа в кардановом подвесе: монография / Д.М. Климов, С.А. Харламов. – М.: Наука, 1978. – 208 с.
13. Коновалов, С.Ф. Гироскопические системы. Проектирование гироскопических систем: учебное пособие / С.Ф. Коновалов, Е.А. Никитин, Л.М. Селиванов. – М.: Высшая школа, 1980. – Ч. III. – 127 с.
14. Лазерный гироскоп: монография / С.И. Бычков, Д.П. Лукьянов, Ф.И. Бакаляр; под ред. С.И. Бычкова. М.: Советское радио, 1975. – 424 с.
15. Матвеев, В.А. Проектирование волнового твердотельного гироскопа: учебное пособие / В.А. Матвеев, В.И. Липатников, А.В. Алехин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 168 с.
16. Никитин, Е.А. Гироскопические системы. Элементы гироскопических приборов: учебное пособие / Е.А. Никитин, С.А. Шестов, В.А. Матвеев. – М.: Высшая школа, 1988. – Ч. III. – 416 с.
17. Николаи, Е.Л. Гироскоп в кардановом подвесе: монография / Е.Л. Николаи. – М.: Наука, 1964. – 136 с.

18. Одинцов, А.А. Теория и расчет гироскопических приборов: учебное пособие / А.А. Одинцов. – К.: Вища школа, 1985. – 392 с.
19. Оптический квантовый гироскоп: монография / Б.Ф. Федоров, А.Г. Шереметьев, В.Н. Умников; под ред. А.Г. Шереметьева. – М.: Машиностроение, 1973. – 222 с.
20. Павловский, М.А. Теория гироскопов: учебное пособие / М.А. Павловский. – К.: Вища школа, 1986. – 303 с.
21. Павловский, М.А. Динамика роторных вибрационных гироскопов: учебное пособие / М.А. Павловский, А.В. Збруцкий. – К.: Вища школа, 1984. – 191 с.
22. Пельпор, Д.С. Динамически настраиваемый гироскоп. Теория и конструкция: монография / Д.С. Пельпор, В.А. Матвеев, В.Д. Арсеньев. – М.: Машиностроение, 1988. – 264 с.
23. Пельпор, Д.С. Гироскопические системы Теория гироскопов и гироскопических стабилизаторов: учебное пособие / Д.С. Пельпор. – М.: Высшая школа, 1971. – Ч. I. – 568 с.
24. Пельпор, Д.С. Гироскопические приборы систем ориентации и стабилизации: монография / Д.С. Пельпор, Ю.А. Осокин, Е.Р. Рахтеенко. – М.: Машиностроение, 1977. – 208 с.
25. Распопов, В.Я. Микромеханические приборы: учебное пособие / В.Я. Распопов. – М.: Машиностроение, 2007. – 400 с.
26. Ривкин, С.С. Теория гироскопических устройств: монография / С.С. Ривкин – Л.: Судпромгиз, 1962. – Ч. 1. – 507 с.
27. Ригли, У. Теория, проектирование и испытания гироскопов: монография / У. Ригли., У. Холлистер, У. Денхард. – М.: Мир, 1972. – 416 с.
28. Сейвет, П. Динамика идеальных подвесов в применении к вращающимся в пространстве телам / П. Сейвет // Механика: периодический сборник переводов иностранных статей. – 1967. – №5. – С. 48–59.
29. Теория и конструкция гироскопических приборов и систем: учебник / Н.В. Одинова, Г.Д. Блюмин, А.В. Карнухин и др.; под ред. Г.Д. Блюмина. – М.: Высшая школа, 1971. – 508 с.
30. Шереметьев, А.Г. Волоконный оптический гироскоп: монография / А.Г. Шереметьев. – М.: Радио и связь, 1987. – 152 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1. ГИРОСКОП. ПРИРОДА ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ	
1.1. Гироскоп. Основные понятия и определения .....	5
1.2. Видимые свойства гироскопа .....	7
1.3. Природа гироскопических явлений.....	9
1.4. Свойства двухстепенного гироскопа .....	6
1.5. Гироскопические эффекты в технике .....	8
2. ТЕОРИЯ ТРЕХСТЕПЕННОГО ГИРОСКОПА .....	22
2.1. Составление уравнений движения гироскопа с использованием теоремы об изменении кинетического момента.....	23
2.2. Составление уравнений движения трехстепенного гироскопа методом кинетостатики .....	28
2.3. Составление уравнений движения гироскопа с помощью уравнений Лагранжа второго рода .....	33
2.4. Линеаризация уравнений движения гироскопа .....	37
2.5. Получение технических уравнений движения гироскопа методом кинетостатики .....	40
2.6. Картинная плоскость .....	42
2.7. Движение свободного гироскопа по инерции (первое приближение) .....	43
2.8. Движение свободного трехстепенного гироскопа по инерции (решение дифференциальных уравнений движения во втором приближении) .	48
2.9. Движение гироскопа под действием постоянных внешних моментов .....	51
2.10. Движение гироскопа под действием периодически изменяющегося момента.....	55
2.11. Влияние моментов сил трения на движение гироскопа.....	58
2.11.1. Влияние моментов вязкого трения на движение трехстепенного гироскопа .....	59
2.11.2. Влияние моментов сухого трения на движение гироскопа .....	62
2.12. Поведение гироскопа на подвижном основании (угловое движение) .....	67
2.13. Поведение гироскопа с учетом статической несбалансированности .....	71
2.14. Влияние конечной жесткости конструкции на поведение гироскопа .....	74
2.15. Модель погрешности трехстепенного гироскопа.....	75
3. ГИРОСКОП С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ	
3.1. Системы координат, применяемые в прикладной гироскопии .....	78
3.1.1. Географическая система координат .....	78
3.1.2. Траекторная система координат .....	81
3.2. Кинематическая схема двухстепенного гироскопа. Уравнение движения..	83
3.2.1. Уравнение движения.....	84
3.2.2. Погрешность двухстепенного гироскопа .....	86
3.3. Одноосный силовой гироскопический стабилизатор.....	90

3.4. Двухстепенный гироскоп, как указатель плоскости географического меридиана.....	94
3.5. Двухстепенный гироскоп, как указатель широты места.....	100
4. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ ГИРОСКОП .....	104
4.1. Поплавковый интегрирующий гироскоп.....	106
4.2. Одноосный индикаторно-силовой гиросtabilизатор.....	110
4.3. Уравнение движения ПИГ.....	112
4.4. Погрешности ПИГ.....	115
5. ДАТЧИКИ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ .....	117
5.1. Кинематическая схема и принцип работы ДУС .....	117
5.2. Уравнение движения ДУС .....	119
5.3. Статическая характеристика ДУС.....	121
5.4. Передаточная функция ДУС. Частотные характеристики.....	123
5.5. Погрешности ДУС .....	126
5.6. Двухроторный ДУС .....	132
5.7. Датчик угловой скорости компенсационного типа .....	135
5.8. Влияние жесткости конструкции ДУС на частоту собственных колебаний .....	140
5.9. Датчик угловой скорости на основе трехстепенного гироскопа.....	141
5.10. Датчики угловой скорости и углового ускорения .....	146
5.10.1. Датчик угловой скорости и углового ускорения .....	146
5.10.2. Двухроторный датчик угловой скорости и углового ускорения.....	151
6. ГИРОСКОПИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАТОР ЛИНЕЙНЫХ УСКОРЕНИЙ.....	155
6.1. Основные характеристики гироскопического интегратора .....	161
6.2. Погрешности гироскопического интегратора .....	162
6.3. Двухроторный гироскопический интегратор линейных ускорений.....	166
7. РОТОРНЫЕ ВИБРАЦИОННЫЕ ГИРОСКОПЫ .....	171
7.1. Уравнения движения роторного вибрационного гироскопа .....	178
7.2. Съём сигнала и обработка информации .....	180
7.3. Уравнения движения роторного вибрационного гироскопа в невращающейся системе координат.....	183
7.4. Передаточные функции прибора.....	184
7.5. Собственные частоты прибора .....	185
8. ДИНАМИЧЕСКИ НАСТРАИВАЕМЫЕ ГИРОСКОПЫ .....	187
8.1. Уравнения движения одноколечного динамически настраиваемого гироскопа.....	187
8.2. Передаточные функции одноколечного ДНГ .....	195
8.3. Статические характеристики одноколечного ДНГ.....	200
8.4. Погрешности гироскопа Хоува от внешних гармонических воздействий с частотой, равной удвоенной частоте вращения вала.....	203
8.5. Уравнения движения динамически настраиваемого гироскопа с двухколечным подвесом .....	206
8.6. Передаточные функции двухколечного ДНГ.....	211
8.7. Собственные передаточные функции двухколечного ДНГ.....	212

8.8. Перекрестные связи двухколечного ДНГ .....	216
8.9. Статические характеристики двухколечного ДНГ .....	219
9. ОСЦИЛЛЯТОРНЫЕ ВИБРАЦИОННЫЕ ГИРОСКОПЫ .....	222
9.1. Камертонный гироскоп.....	222
9.2. Уравнение движения камертонного гироскопа .....	223
9.3. Грибовидный гироскоп.....	224
9.4. Микромеханические гироскопы .....	226
9.4.1. Одномассовые микромеханические гироскопы LL-типа.....	228
9.4.2. Двухмассовые микромеханические гироскопы LL-типа .....	231
9.4.3. Микромеханические гироскопы RR-типа .....	232
10. ВОЛНОВЫЕ ТВЕРДОТЕЛЬНЫЕ ГИРОСКОПЫ .....	237
10.1. Принцип работы гироскопа с полусферическим резонатором .....	237
10.2. Кольцевая модель резонатора ВТГ .....	240
11. ОПТИЧЕСКИЕ КВАНТОВЫЕ ГИРОСКОПЫ.....	242
11.1. Лазерный гироскоп .....	244
11.2. Волоконно-оптический гироскоп .....	248
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	250